

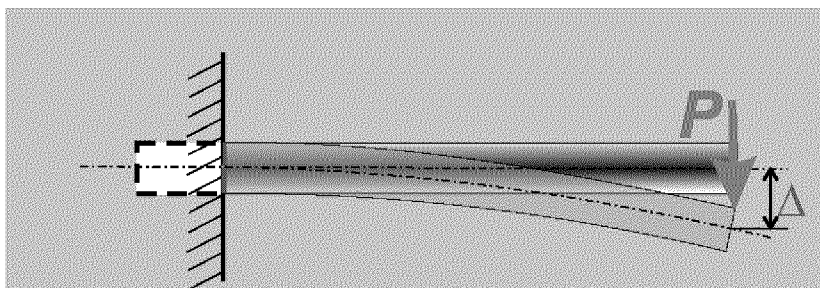
Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Воронежская государственная лесотехническая академия

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



ВОРОНЕЖ 2011

УДК 620.1 (075)

Сопротивление материалов: Расчет элементов конструкций: Учебное пособие к расчетно-графическим работам по сопротивлению материалов для технических направлений и специальностей подготовки ВГЛТА. Зобов С.Ю., Черников Э.А., Зеленская О.В. – Воронеж, 2011. – 68 с.

Печатается по решению редакционно-методического совета ВГЛТА.

Учебное пособие обсуждена на кафедре «Механика» и кафедре «Высшей математики и теоретической механики» ВГАУ.

Рецензент
зав. кафедрой
высшей математики и
теоретической механики ВГАУ
д.т.н., профессор

Шацкий В.П.

Ответственный редактор

Зобов С.Ю.

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с учебным планом и программой курса «*Сопротивление материалов*» студенты технических направлений и специальностей подготовки ВГЛТА очной формы обучения самостоятельно выполняют расчетно-графические работы по дисциплине.

В ходе выполнения расчетно-графических работ развиваются самостоятельность и инициатива, вырабатываются навыки решения задач и уверенность в правильности полученных результатов и их интерпретации.

Каждая расчетно-графическая работа представляет собой решение одной или нескольких задач, объединенных целью и последовательностью выполнения, и ставит своей целью практическое усвоение соответствующего раздела теоретического материала курса.

Необходимый объем работ и последовательность их выполнения для студентов даны в тексте заданий.

Методическое пособие содержит общие требования к самостоятельному выбору вариантов и их оформлению.

Приведены основные понятия и зависимости и примеры практического решения задач, охватывающих рассматриваемые разделы курса «Сопротивление материалов».

Представлены варианты контрольных заданий расчетно-графических работ: № 1 «Расчет элементов конструкций на прочность и жесткость» и № 2 «Расчет статически неопределимой системы»

Общие справочные данные, используемые при решении задач, представлены в Приложениях.

Используемые обозначения и единицы измерения

Нагрузки:

F – сосредоточенная сила, кН ; $1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н} = 10^2 \text{ кгс}$;

M – сосредоточенная пара сил (момент), $\text{кН}\cdot\text{м}$;

q – интенсивность распределенной по длине стержня нагрузки, $\text{кН}/\text{м}$.

Обозначение осей:

x – продольная ось стержня;

y, z – главные центральные оси инерции поперечного сечения.

Геометрические характеристики поперечного сечения :

A – площадь поперечного сечения, см^2 ;

S_x, S_y, S_z – статические моменты относительно осей x, y, z , см^3 ;

J_x, J_y, J_z – осевые моменты инерции относительно осей x, y, z , см^4 ;

J_{xy} – центробежный момент инерции, см^4 ;

J_p – полярный момент инерции, см^4 .

Внутренние усилия:

N – продольная сила, кН ;

Q_y, Q_z – поперечные силы относительно соответствующих осей, кН ;

M_y, M_z – изгибающие моменты относительно соответствующих осей, $\text{кН}\cdot\text{м}$;

$T, M_{кр.}$ – крутящий момент, $\text{кН}\cdot\text{м}$.

Напряжения:

σ – нормальные напряжения, МПа ;

τ – касательные напряжения, МПа ;

$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 10^6 \text{ Н}/\text{м}^2 = 10^2 \text{ кгс}/\text{см}^2$.

Деформации и перемещения:

Δl – абсолютная деформация стержня при растяжении (сжатии), см ;

$\varepsilon, \varepsilon'$ – относительные продольная и поперечная деформации;

γ – угловые деформации (углы сдвига);

φ – относительный угол закручивания стержня (вала) при кручении, $\text{рад}/\text{м}$;

f, y – прогиб, вертикальная деформация балки, см ;

θ – угол поворота балки.

Характеристики материала:

σ_y – предел текучести, МПа ;

$\sigma_{ит}, \sigma_{ис}$ – предел прочности при растяжении (сжатии), МПа ;

$[\sigma], [\tau]$ – допускаемые напряжения, МПа ;

E – модуль упругости, $E_{сталь} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^6 \text{ кгс}/\text{см}^2$;

G – модуль сдвига, $G_{сталь} = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 8 \cdot 10^5 \text{ кгс}/\text{см}^2$;

μ, ν – коэффициент Пуассона;

γ – удельный вес, $\gamma_{сталь} = 78 \text{ кН}/\text{м}^3 = 7,8 \text{ г}/\text{см}^3$.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫБОРУ ВАРИАНТА И ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Цель расчетно-графической работы – практическое освоение теоретического курса и приобретение навыков решения задач, имеющих как учебный, так и прикладной характер.

Выдача заданий, консультации и защита работ производится руководителем практических занятий. Перед выдачей задания преподаватель знакомит студентов с содержанием, целью и порядком выполнения работы, устанавливает сроки защиты работ.

Исходные данные каждой задачи студенты выбирают в соответствии со своим учебным шифром. Для выбора индивидуального варианта задания используются две последние цифры номера зачетной книжки. Цифры соответствует строке (варианту) числовых исходных данных в таблицах заданий и номеру расчетной схемы задачи. ***Вариант « д » соответствует предпоследней, а вариант « е » – последней цифре шифра студента. Расчетная схема выбирается по последней цифре номера зачетной книжки – буква « е ».***

Например: номер зачетной книжки **205619**. В этом случае из столбцов «д» берутся данные по строке **1**, а из столбцов «е» – по строке **9**, схема **№ 9**.

Перед выполнением задач следует ознакомиться с соответствующими разделами теоретического курса лекций и учебников, которые приведены в рекомендуемом списке литературы.

В процессе расчетов следует обратить внимание на согласованность единиц измерения величин, входящих в формулы. (Не забывайте писать, в каких единицах получен результат.). Рекомендуемые единицы измерения приведены в перечне используемых обозначений. Все арифметические вычисления следует выполнять с точностью до двух значащих цифр, принятой для инженерных расчетов.

Пояснительная записка оформляется в соответствии с ГОСТ 7.32—91 п.4 на стандартных листах писчей бумаги формата А-4 (210x297 мм).

Листы расчетно-графической работы брошюруются и снабжаются титульным листом с обязательным указанием дисциплины, номера варианта задания и данных исполнителя.

При представлении задач обязательными элементами являются:

- расчетные схемы, выполненные в масштабе и конкретизированные в соответствии с индивидуальными данными;
- краткие пояснения вычислений и расчетных формул;
- требуемые эпюры, выполненные в масштабе.

В процессе защиты студентам предлагаются задачи и контрольные вопросы из соответствующего раздела курса.

Небрежно оформленные и выполненные не по заданию РГР к защите не принимаются.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАВИСИМОСТИ

1 Задачи курса “Соппротивление материалов”

Различные инженерные сооружения – здание, мост, автомобиль, корабль и т.д. – помимо других своих качеств должны обязательно обладать **прочностью**, т.е. способностью сопротивляться разрушению под действием приложенных к ним внешних сил (нагрузок).

Для этого элементы (детали) сооружений должны быть изготовлены из соответствующего материала и иметь необходимые размеры.

Изучение методов расчета элементов конструкций на прочность и составляет первую задачу курса сопротивления материалов.

Помимо этого во многих случаях приходится определять изменения формы и размеров (**деформации**), которые возникают в элементах конструкции под действием нагрузок. Эти деформации невелики и обнаружить их можно лишь с помощью специальных приборов (тензометров). Но без изучения этих деформаций невозможно решить следующие задачи: при каких условиях может произойти разрушение детали и, наоборот, при каких условиях деталь может безопасно работать.

Способность элемента конструкции сопротивляться деформации называется *жесткостью*. Отсюда вторая задача курса: изучение методов расчета конструкций на жесткость.

Инженерное сооружение должно быть устойчивым, т.е. в пределах заданных величин внешних нагрузок отдельные элементы, все сооружение в целом должно сохранять первоначальную форму равновесия. Потеря устойчивости может иметь место при значениях нагрузок, совершенно безопасных с точки зрения прочности или жесткости элемента. Изучение методов расчета на *устойчивость* составляет третью задачу курса. Следовательно, сопротивление материалов дает практические методы расчета элементов конструкции на прочность, жесткость и устойчивость.

2 Внутренние усилия. Метод сквозного разреза. Типы деформации

Непосредственной причиной разрушения материала элемента конструкции являются внутренние усилия.

Внутренние усилия возникают от действия внешних нагрузок и определяются методом сквозного разреза (сечений), сущность которого состоит в следующем:

1. Мысленно рассекаем стержень (тело) по сечению I – I, в котором требуется определить величину внутренних усилий (рис. 1, а).

2. Отбрасываем ту часть стержня, к которой приложено большее число внешних сил. Это делается для того, чтобы уравнение равновесия оставшейся части было проще.

3. Поскольку разрез был “мысленный”, а стержень находился в равновесии, то условно отброшенная часть стержня также находится в равновесии. Это обеспечивается заменой действия отброшенной части на оставшуюся часть стержня, главным вектором \bar{R} и главным моментом \bar{M} , проведенными через центр тяжести сечения I – I. \bar{R} и \bar{M} будут статическим эквивалентом тех внут-

ренных силовых факторов, которые передавались со стороны отброшенной части на оставшуюся (рис. 1, *b*).

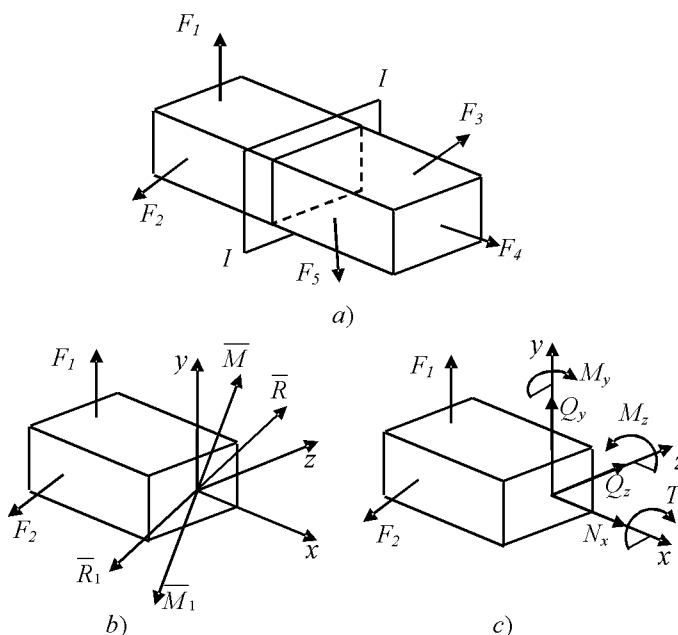


Рис. 1 Метод сквозного разреза

4. В свою очередь мы можем привести силы, действующие на оставшуюся часть, тоже к главному вектору \bar{R}_1 и главному моменту \bar{M}_1 . Очевидно, что они должны быть равны по величине и противоположно направлены по отношению к главному вектору \bar{R} и главному моменту \bar{M} внутренних усилий (рис. 1, *b*), иначе условие равновесия не будет обеспечено.

Отсюда следует вывод: *величина внутренних усилий (силовых факторов) может быть определена по величине внешних сил, действующих на оставшуюся часть стержня*

Проекции \bar{R} на оси x , y , z и составляющие \bar{M} относительно данных осей (рис. 1, *c*) имеют следующие наименования:

N – продольная сила, направлена по перпендикуляру к сечению;

Q_y и Q_z – поперечные (перерезывающие) силы, действуют в плоскости поперечного сечения;

T – крутящий момент, действует в плоскости поперечного сечения;

M_y и M_z – изгибающие моменты относительно осей y , и z .

Все шесть внутренних силовых факторов могут быть найдены из шести уравнений равновесия статики, которые можно записать для пространственной системы. Для плоской системы записывают три таких уравнения.

Внутренним силовым факторам соответствуют четыре вида простейших деформаций:

Действует продольная сила N – это растяжение или сжатие;

Действует поперечная сила Q – это срез (сдвиг);

Действует крутящий момент T – это кручение;

Действует изгибающий момент M – это “чистый изгиб”.

3 Растяжение (сжатие)

Растяжением (сжатием) называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает только *продольная сила* N , а все остальные внутренние усилия равны нулю.

При растяжении (сжатии) продольная сила, направленная по нормали от сечения – положительна, если по нормали к сечению – отрицательна.

Продольная сила в сечении определяется методом сквозного разреза. Она численно равна алгебраической сумме внешних сил, действующих вдоль оси стержня по одну сторону от сечения, и противоположно направлена.

Для выяснения закона распределения продольных сил по длине стержня строится эпюра N (рис. 2).

Определение значения продольной силы на каждом силовом участке:

$$\begin{aligned} F_1 - N(x_1) &= 0; & N(x_2) &= F_1 - F_2 = 2 - 6 = -4кН; \\ N(x_1) &= F_1 = 2кН; & N(x_3) &= F_1 - F_2 + F_3 = 2 - 6 + 5 = 1кН. \end{aligned}$$

Эпюрой называется график, показывающий закон изменения какого-либо силового фактора по длине элемента конструкции.

Любая ордината эпюры показывает величину силового фактора в сечении, расположенном против данной ординаты.

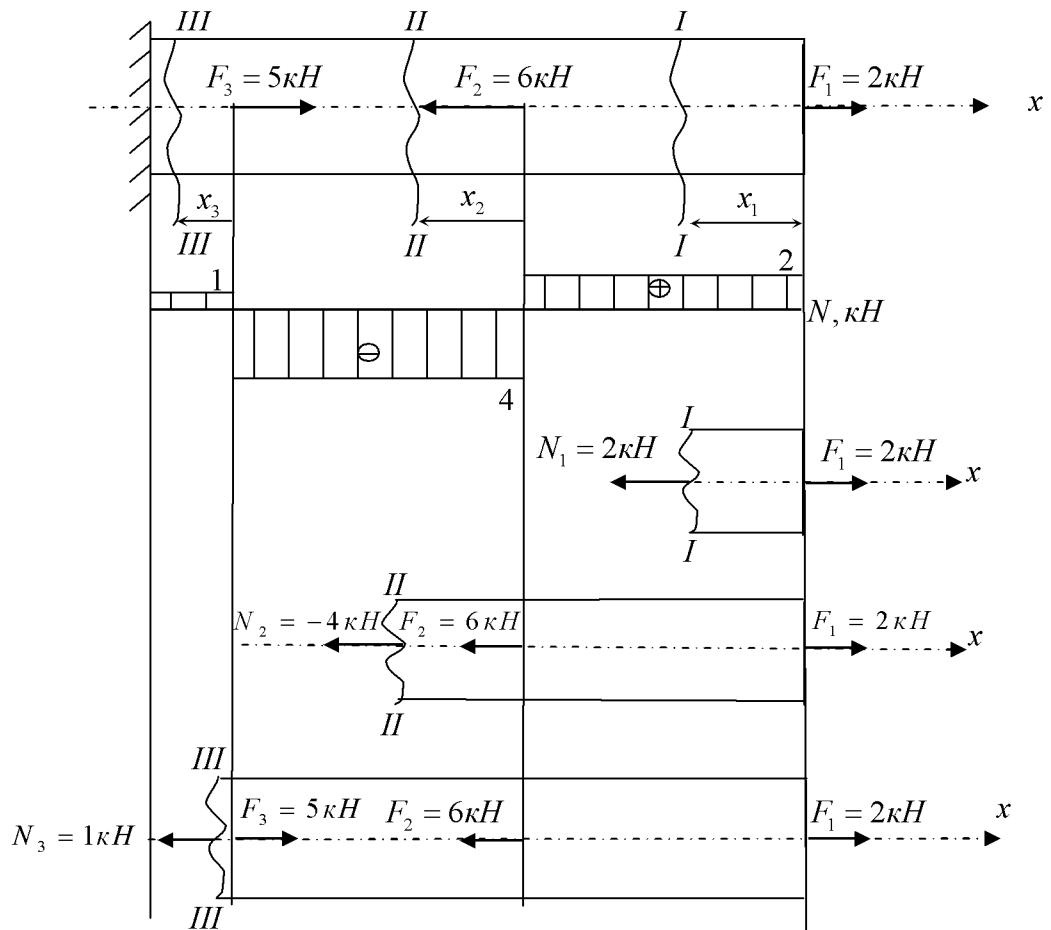


Рис. 2 Эпюры продольных сил

Скачки на эпюре равны величинам внешних продольных сил, приложенных в соответствующих сечениях.

Решаются три вида задач расчета на прочность:

1. Исходя из критерия прочности при растяжении (сжатии) определяется площадь поперечного сечения стержня:

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_{\max}|}{A_{\text{необх.}}} \leq [\sigma]; \quad A_{\text{необх.}} = \frac{|N_{\max}|}{[\sigma]}. \quad (1)$$

2. Определяется несущая способность (грузоподъемность) стержня:

$$[F] = A_{\text{факт.}} \cdot [\sigma]. \quad (2)$$

3. Проверяются фактические напряжения:

$$\sigma_{\text{факт.}} = \frac{|N_{\max}|}{A_{\text{факт.}}} \leq [\sigma]. \quad (3)$$

Расчет на жесткость проводится по следующей формуле:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \leq [\Delta l]. \quad (4)$$

Абсолютная деформация Δl пропорциональна продольной силе N , действующей на силовом участке длиной l и обратно пропорциональна жесткости при растяжении (сжатии) – EA .

4 Кручение

Кручением называется такой вид напряженного и деформируемого состояния, при котором в поперечном сечении круглого стержня возникает только один внутренний силовой фактор, – *крутящий момент* T , действующий в плоскости сечения.

Крутящий момент, действующий в каком-либо сечении на левую часть бруса, равен и противоположно направлен крутящему моменту, действующему в том же сечении на его правую часть. Следовательно, кручение является примером чистого сдвига, при котором в поперечном сечении возникают только касательные напряжения.

На основании метода сквозного разреза, крутящий момент в произвольном поперечном сечении стержня численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, действующих по одну сторону от сечения, и направлен в противоположную сторону по отношению к их равнодействующему моменту.

Крутящий момент является положительным, если внешний скручивающий момент поворачивает круглый вал по часовой стрелке, если смотреть со стороны разреза.

Правило остаётся неизменным для любой рассматриваемой части вала – левой или правой. Пример построения эпюр T показан на рис. 6.

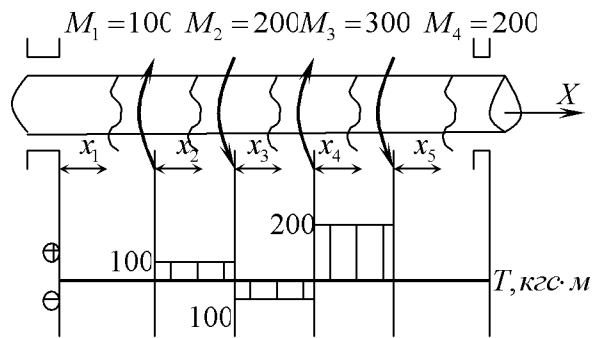


Рис. 3 Эпюра крутящих моментов

Определяем значения крутящих моментов на каждом силовом участке:

$$T(x_1) = 0; \quad T(x_2) = M_1 = 100 \text{ кгс} \cdot \text{м};$$

$$T(x_3) = M_1 - M_2 = 100 - 200 = -100 \text{ кгс} \cdot \text{м};$$

$$T(x_4) = M_1 - M_2 + M_3 = 100 - 200 + 300 = 200 \text{ кгс} \cdot \text{м};$$

$$T(x_5) = M_1 - M_2 + M_3 - M_4 = 100 - 200 + 300 - 200 = 0.$$

При рассмотрении эпюр учитываются следующие факторы: крутящие моменты в опорных сечениях равны нулю, если опоры подшипники; скачки на эпюре T равны величине скручивающих моментов, приложенных в данном сечении; расчет на прочность производится по наибольшей абсолютной величине крутящего момента. В данном примере это $T(x_4) = 200 \text{ кгс} \cdot \text{м}$.

Критерий прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{|T_{\max}|}{W_p^{\text{необх.}}} \leq [\tau], \quad (5)$$

где $W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}$ – полярный момент сопротивления, см^3 ;

T_{\max} – максимальный крутящий момент;

$[\tau]$ – допускаемые напряжения при кручении.

Подбор поперечного сечения осуществляется по формуле

$$W_p^{\text{необх.}} = \frac{|T_{\max}|}{[\tau]}. \quad (6)$$

Для расчета сплошных и полых валов по формулам (5) и (6) необходимо определять полярные момент инерции J_p и момент сопротивления W_p , выразив данные характеристики через диаметр.

Для сплошного вала

$$J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32}, \quad W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16}. \quad (7)$$

Для полого вала

$$J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32}(1 - c^4), \quad W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16}(1 - c^4). \quad (8)$$

где $c = \frac{d}{D}$.

Значение W_p позволяет подобрать диаметр вала по формулам:

$$D = \sqrt[3]{\frac{|T_{\max}|}{0,2[\tau]}}, \quad D = \sqrt[3]{\frac{|T_{\max}|}{0,2 \cdot (1 - c^4) \cdot [\tau]}}. \quad (9)$$

Расчет на жесткость при кручении проводится по следующей формуле:

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot J_p} \leq [\varphi]. \quad (10)$$

Угол закручивания φ пропорционален крутящему моменту T , длине участка l , на котором он действует, и обратно пропорционален жесткости при кручении GJ_p .

В данном выражении угол закручивания φ выражен в радианах, а перерасчет в градусах производят из соотношения $\frac{180^\circ}{\pi} = 57,3^\circ$ и проводят расчет на длину вала в 100см:

$$\varphi = \frac{T \cdot 100}{G \cdot J_p} \cdot 57,3^\circ = 5730 \frac{T}{G \cdot J_p} \leq [\varphi]. \quad (11)$$

При расчете валов $[\varphi]$ принимают:

при статических нагрузках $[\varphi] = 0,3^\circ$;

при переменных напряжениях $[\varphi] = 0,25^\circ$;

при ударных нагрузках $[\varphi] = 0,15^\circ$.

5 Поперечный изгиб

Изгибом называется такой вид напряженного и деформируемого состояния, когда в поперечных сечениях стержня, называемого балкой, возникают *изгибающие моменты M* , действующие в плоскости, перпендикулярной поперечному сечению, и *поперечные силы Q* , действующие в этом сечении.

Такой вид изгиба называется *поперечным* (в отличие от продольного изгиба, вызываемого действием продольных сил).

Внешней нагрузкой при изгибе могут быть сосредоточенные силы F и изгибающие моменты M , а также распределенные нагрузки q .

Внешнюю нагрузку уравнивают реакции, возникающие в опорах балок. Вид опорной реакции зависит от устройства опоры, т.е. от того, сколько связей накладывает это устройство.

Подвижная шарнирная опора (рис. 4, а) накладывает одну связь, препятствующую перемещениям в направлении, перпендикулярном её основанию. Этой связи соответствует одна реакция V .

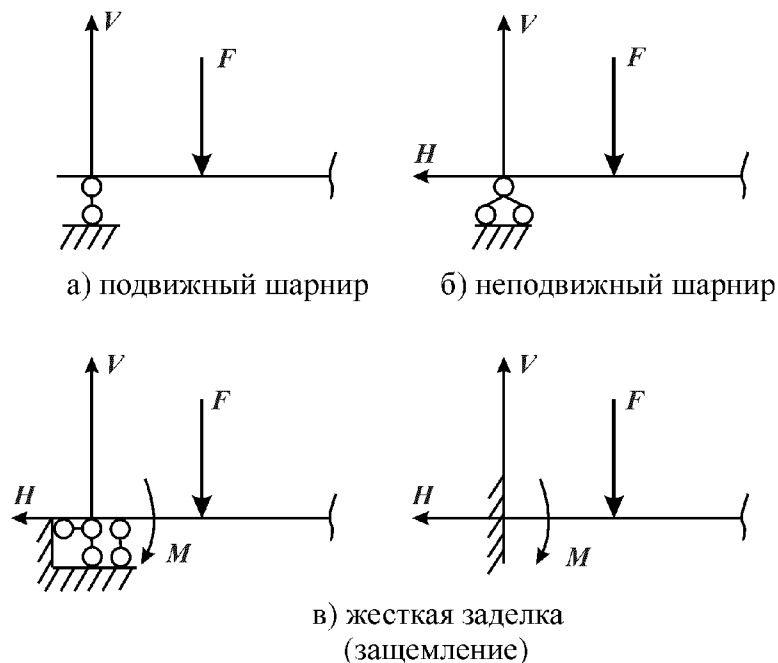


Рис. 4 Виды опорных реакций

Неподвижная шарнирная опора (рис. 4, б) накладывает две связи, препятствующие перемещениям в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Им соответствуют две реакции – V и H .

Консольная заделка накладывает три связи, препятствующие вертикальному и горизонтальному перемещениям и повороту опоры (рис. 4, в).

Рекомендуется следующая последовательность при вычислении опорных реакций:

Составляют уравнения суммы моментов всех внешних сил относительно центров тяжести опорных сечений и приравнивают их к нулю. Из этих уравнений определяют две неизвестные опорные реакции.

Из суммы проекций всех внешних сил на ось x находят третью неизвестную реакцию.

Проверяют правильность определения вертикальных опорных реакций с помощью уравнения суммы проекций всех сил на ось y , которая должна быть равна нулю.

После определения опорных реакций приступают к исследованию напряженного состояния в сечениях балки, для чего должны быть найдены внутренние силовые факторы – поперечные силы и изгибающие моменты. Они определяются с помощью метода сквозного разреза.

Поперечная сила Q_y в сечении балки численно равна алгебраической сумме внешних поперечных сил, действующих по одну сторону от сечения.

При вычислении поперечной силы Q_y по силам, находящимся *слева* от сечения, любую внешнюю силу будем считать положительной, если она направлена *вверх* (рис. 5).

При вычислении поперечной силы Q_y , по силам находящимся *справа* от сечения, любую внешнюю силу будем считать положительной, если она направлена *вниз* (рис. 5).

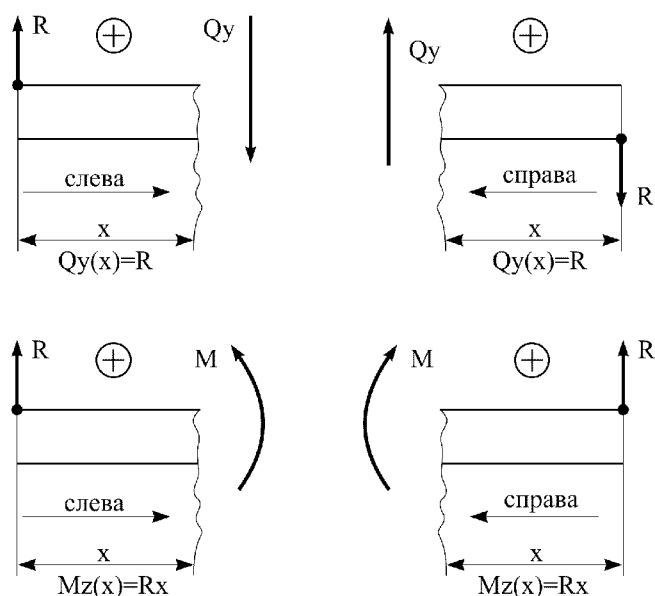


Рис. 5 Правило знаков для поперечных сил и изгибающих моментов

При вычислении изгибающего момента M_z по действию сил, находящихся *слева* от сечения, момент любой внешней силы относительно центра тяжести сечения будем считать положительным, если он обуславливает вращение левой части балки *по часовой стрелке* (рис. 5).

При вычислении изгибающего момента M_z по действию сил, находящихся *справа* от сечения, момент любой внешней силы относительно центра тяжести сечения будем считать положительным, если он обуславливает вращение правой части балки *против часовой стрелки* (рис. 5).

Построение эпюр поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_z производится следующим образом (рис. 6).

Определяем опорные реакции, используя уравнения суммы моментов внешних сил относительно центров тяжести опорных реакций:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0; & \quad -2 \cdot q \cdot 1 + R_B \cdot 2 + M = 0; \\ & \quad R_B = \frac{2 \cdot q \cdot 1 - M}{2} = \frac{2 \cdot 4 - 6}{2} = 1 \text{ кН}. \\ \Sigma M_B = 0; & \quad 2 \cdot q \cdot 1 - R_B \cdot 2 - F \cdot 2 + M = 0; \\ & \quad R_B = \frac{2 \cdot q \cdot 1 - F \cdot 2 + M}{2} = \frac{2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 6}{2} = 5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Делаем проверку с помощью уравнения суммы проекций всех сил на ось y :

$$\Sigma F_y = 0; \quad R_A + F - 2 \cdot q + R_B = 0;$$

$$5 + 2 - 2 \cdot 4 + 1 = 0.$$

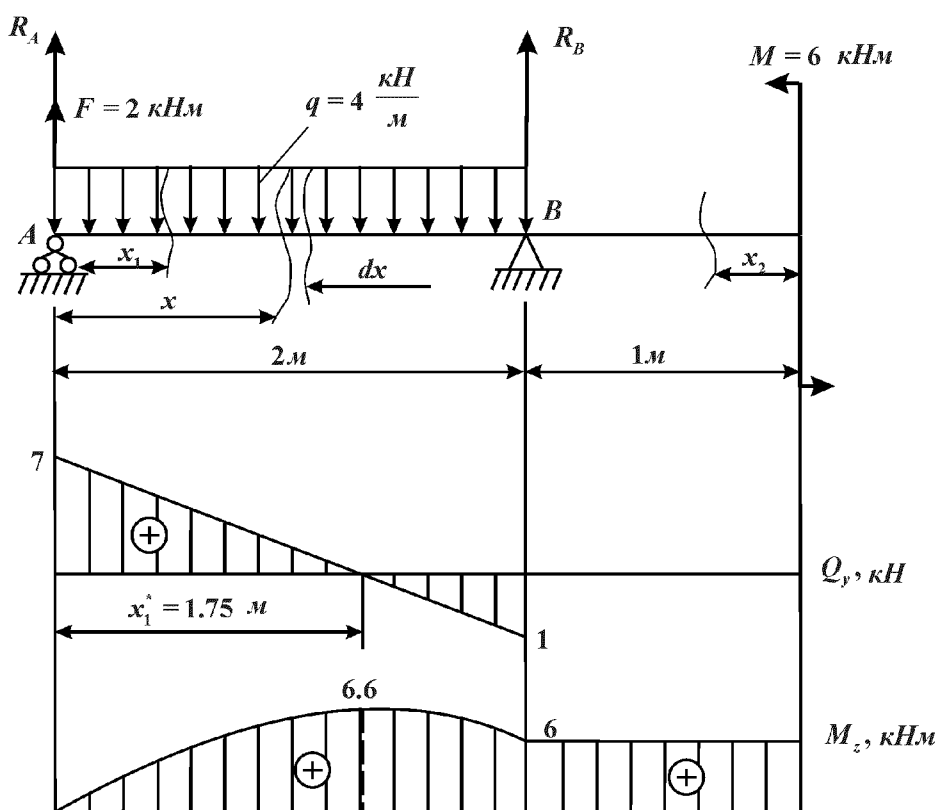


Рис. 6 Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Определяем значения поперечных сил Q_y изгибающих моментов M_z на каждом силовом участке:

| | | |
|--|--|--|
| $0 \leq x_1 \leq 1m$ $Q_y(x_1) = 0$ $M_z(x_2) = M = 6kH \cdot m$ | | $0 \leq x_2 \leq 2m$ $Q_y(x_2) = R_A + F - q \cdot x_2 = 5 + 2 - 4x_2 \begin{cases} 2m = -1kH \\ 0m = 7kH \end{cases}$ $Q_y(x_2^*) = 7 - 4x_2^* = 0$ $x_2^* = \frac{7}{4} = 1,75m$ $M_z(x_2) = R_A \cdot x_2 + F \cdot x_2 - q \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} = 5x_2 + 2x_2 - 2x_2^2 \begin{cases} 2m = 6kH \cdot m \\ 1,75m = 6,6kH \cdot m \\ 0m = 0kH \cdot m \end{cases}$ |
|--|--|--|

Строим эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_z (рис. 6).

В расчет на прочность принимают наибольшую по абсолютной величине ординату из эпюры изгибающих моментов. В нашем примере — это $M_z(x_2) = 6,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Следует обратить внимание на то, что скачки на эпюрах Q_y и M_z имеют место против тех сечений балки, где приложены соответственно сосредоточенные силы или изгибающие моменты. Величина скачка должна быть равна величине сосредоточенной силы или момента.

Критерий прочности при изгибе по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x^{\text{необх.}}} \leq [\sigma] \quad (12)$$

где $W_x = \frac{I_x}{|y_{\max}|}$ — момент сопротивления относительно оси x ;

M_{\max} — максимальное значение M_z , взятое из эпюры;

σ_{\max} — наибольшее нормальное напряжение;

$[\sigma]$ — допускаемые напряжения, зависят от материала балки.

Подбор поперечного сечения осуществляется по формуле

$$W_x^{\text{необх.}} = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} \quad (13)$$

Для прямоугольного и круглого профиля поперечного сечения необходимо знать значения I_x и W_x .

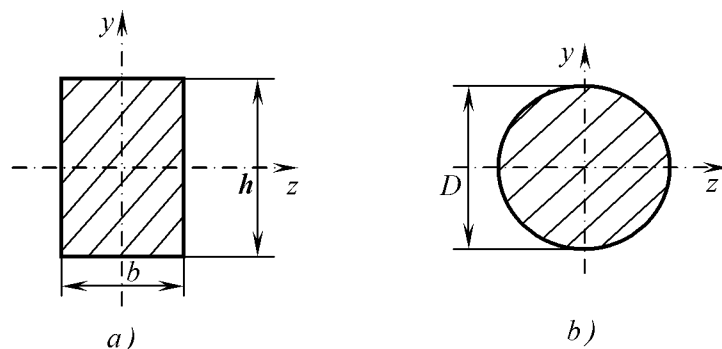


Рис. 7 Прямоугольное и круглое поперечные сечения

Прямоугольное сечение

(рис. 7, а):

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad W_x = \frac{b \cdot h^2}{6};$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}; \quad W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}.$$

Круглое сечение

(рис. 7, б):

$$I_x = \frac{\pi \cdot D^4}{64};$$

$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \approx 0,1D^3.$$

(14)

Диаметр балки круглого поперечного сечения подбирается следующим образом:

$$D = \sqrt[3]{\frac{|M_{\max}|}{0,1[\sigma]}}. \quad (15)$$

Размеры балки прямоугольного поперечного сечения, подбираются аналогично, если задаться отношением его высоты и ширины.

Подсчитываем фактические напряжения σ_{\max} и сравниваем их с допускаемыми:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x^{\text{факт.}}} \leq [\sigma] \quad (\pm 5\%) \quad (16)$$

Для прокатных профилей по таблицам ГОСТа подбираем близкое значение W_x и по формуле (16) сравниваем фактические напряжения σ_{\max} с допускаемыми.

Проверка конструкции на прочность по касательным напряжениям осуществляется по формуле Журавского:

$$\tau_{\max} = \frac{|Q_{\max}| \cdot S_x}{s \cdot J_x} \leq [\tau]. \quad (17)$$

где Q_{\max} – максимальное значение Q_y , взятое из эпюры;

S_x – статический момент сечения относительно оси x ;

τ_{\max} – наибольшее касательное напряжение;

$[\tau]$ – допускаемые напряжения, зависят от материала балки.

6 Расчет на жесткость при изгибе

Для расчета на жесткость приводятся два метода определения перемещений при изгибе: метод Мора и метод Верещагина.

Метод определения перемещений О. Мора

Наиболее общей формулой, позволяющей находить линейные и угловые перемещения стержневой системы по любому направлению, является формула (интеграл) Мора.

Формула Мора для определения перемещения сечения плоской стержневой системы имеет следующий вид:

$$\Delta_{1\Sigma P_1} = \sum \int_L \frac{M(x)M^0(x)}{EI_z} \cdot dx + \sum \int_L \frac{Q(x)Q^0(x)}{KGA} \cdot dx + \sum \int_L \frac{N(x)N^0(x)}{EA} \cdot dx, \quad (18)$$

где $\Delta_{1\Sigma P_1}$ – искомое перемещение (линейное или угловое) в точке приложения силы или момента, равных единице, и по их направлению от действия всей внешней нагрузки, приложенной к системе (балке, раме, и т.д.);

$M(x), Q(x), N(x)$ – уравнения изгибающих моментов, поперечных и продольных сил на силовых участках системы от внешней нагрузки;

$M^0(x), Q^0(x), N^0(x)$ – уравнения изгибающих моментов, поперечных и продольных сил на тех же силовых участках системы от единичной нагрузки;

K – безразмерный коэффициент, характеризующий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте поперечного сечения балки.

Физический смысл формулы (18) заключается в следующем: *работа единичной силы (момента) на перемещении от заданной нагрузки равна работе внутренних сил от заданной нагрузки на перемещении, вызванном единичной силой (моментом).*

Принимается следующий порядок вычисления перемещений:

– определяем опорные реакции системы от внешней нагрузки, разбиваем ее на силовые участки и пишем уравнение изгибающих моментов для этих участков;

- освобождаем систему от внешней нагрузки и прикладываем силу $P^0(x)=1$ в той точке, где хотим определить линейное перемещение (прогиб), или же момент $M^0(x)=1$ в том сечении, угол поворота которого нужно определить;
- находим опорные реакции системы от единичной нагрузки, разбиваем ее на силовые участки, аналогичные силовым участкам от внешней нагрузки, и пишем уравнение изгибающих моментов для этих участков. Отсчет абсцисс всех участков в единичной и заданной системах необходимо производить от аналогичных начал координат, т.к. уравнения $M(x)$ и $M^0(x)$; должны иметь одни и те же пределы интегрирования;
- подставляем уравнения изгибающих моментов от внешней и единичной нагрузок в интеграл Мора (без учета членов, содержащих Q и N) и вычисляем искомое перемещение.

В данном примере, рассматривается консольная балка (заданная система), следовательно, опоры реакции можно не находить, т.к. отсчет x начнем с точки B (рис. 8, а).

Для нахождения прогиба освободим балку от нагрузки F и приложим в точке B силу $P^0(x)=1$, – 1-я единичная система (рис. 8, б).

Для нахождения угла поворота в точке B , приложим момент $M^0(x)=1$, – 2-я единичная система (рис. 8, в).

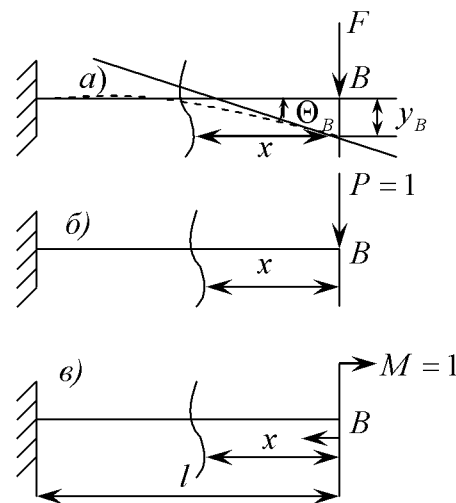


Рис. 8 Метод определения перемещений Мора

Определим значения изгибающих моментов в заданной и единичных системах:

$$M(x) = -F \cdot x, \quad M^{01}(x) = -1 \cdot x = -x, \quad M^{02}(x) = -1.$$

Для нахождения прогиба подставляем $M(x)$ и $M^{01}(x)$ в интеграл Мора:

$$y_B = \Delta_{1\Sigma P_i} = \int_0^l \frac{M(x) - M^{01}(x)}{EJ_z} \cdot dx = \frac{1}{EJ_z} \int_0^l (-Fx) \cdot (-x) \cdot dx = \frac{F^3}{3EJ_z}.$$

Для нахождения угла поворота подставляем $M(x)$ и $M^{02}(x)$ в интеграл Мора:

$$\theta_B = \int_0^l \frac{M(x) - M^{02}(x)}{EJ_z} \cdot dx = \frac{1}{EJ_z} \int_0^l (-Fx)(-1) dx = \frac{Fl^2}{2EJ_z}.$$

Перемещения получились положительными, т.к. их направления совпали с направлениями силы $P^0(x) = 1$ и момента $M^0(x) = 1$.

Метод вычисления перемещений А.К. Верещагина

Сущность правила Верещагина при определений заключается в том, что интеграл Мора (18) вычисляют графическим способом, путем так называемого “правила перемножения эпюр”:

$$\int M(x) \cdot M^0(x) \cdot dx = \omega_i \cdot Mc_i^0. \quad (19)$$

где ω_i – площадь эпюры $M(x)$ от заданной нагрузки;

Mc_i^0 – ордината эпюры $M^0(x)$ от единичной нагрузки, расположенная под центром тяжести эпюры $M(x)$ от заданной нагрузки.

Подставляя, найдем значение интеграла в формулу (18), получаем формулу для определения перемещений:

$$\Delta_{1\Sigma P_i} = \sum \frac{\omega_i \cdot Mc_i^0}{EJ_z}. \quad (19)$$

При применении метода Верещагина умение строить эпюры изгибающих моментов приобретает важнейшее значение, причем надо четко понимать, что он применим только на участках, где одна из эпюр прямолинейна. Если эпюра

$M^0(x)$ имеет ломаные очертания, то необходимо “перемножать” эпюры порознь для каждого участка, ограниченного прямой линией и результаты складывать.

Для вычисления перемещений по методу Верещагина требуется знать выражения площадей и координату центра тяжести механических фигур, которые чаще всего встречаются в эпюрах моментов. Эти данные можно найти в приложении.

Порядок вычисления перемещений по методу Верещагина вначале совпадает с порядком, применяемым в методе Мора, но после написания уравнений изгибающих моментов $M(x)$ и $M^0(x)$ по всем силовым участкам системы необходимо построить эпюры этих моментов. Затем эпюру $M^0(x)$ разбивают на участки, ограниченные прямой линией, подсчитывают площади эпюры $M(x)$ в границах этих участков и определяют положение их центров тяжести.

Далее, как правило, из подобия треугольников, определяют значения Mc_i^0 против соответствующих центров тяжести и, перемножая по участкам ω и Mc_i^0 , складывают полученные результаты. После деления на жесткость EJ_z находим значения искомых перемещений.

Рассмотрим пример применения метода Верещагина на уже знакомой нам консольной балке (рис. 9).

Определим значения изгибающих моментов в заданной и единичных системах:

$$M(x) = -F \cdot x \Big|_{0=0}^{l=-Fl}, \quad M^{01}(x) = -1 \cdot x = -x \Big|_{0=0}^{l=-l}, \quad M^{02}(x) = -1.$$

Вычислим площадь эпюры $M(x)$ в заданной системе:

$$\omega = \frac{1}{2}hl = \frac{1}{2}(-Fl)l = -\frac{Fl^2}{2}.$$

Определим значения ординат Mc_i^0 в единичных системах:

$$\frac{Mc_i^{01}}{-l} = \frac{\frac{2}{3}l}{l} \rightarrow Mc_i^{01} = -\frac{2}{3}l; \quad Mc_i^{02} = -1.$$

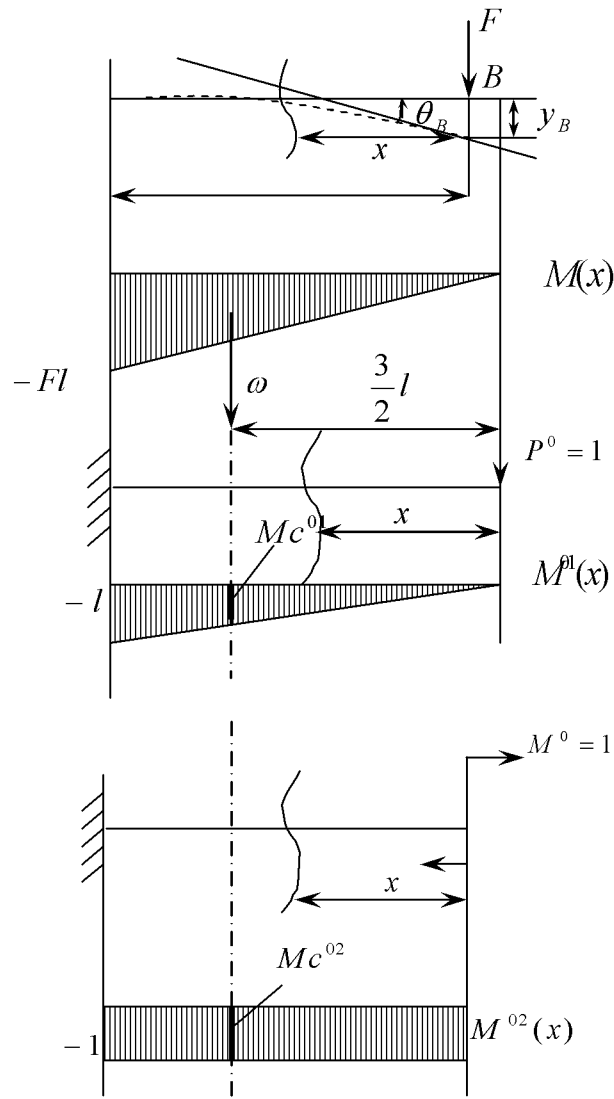


Рис. 9 Метод определения перемещений Верещагина

По формуле (19) определяем значения прогиба и угла поворота:

$$y_A = \Delta_{1\Sigma P_1} = \frac{\omega \cdot Mc^{01}}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \cdot \left(-\frac{Fl^2}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}l\right) = \frac{Fl^3}{3EJ_z},$$

$$\theta_B = \frac{\omega \cdot Mc^{02}}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \cdot \left(-\frac{Fl^2}{2}\right) \cdot (-1) = \frac{Fl^2}{2EJ_z}.$$

Перемещения получились те же, что и в ранее разобранным случае.

7 Статически неопределимая система

Система является *статически неопределимой*, если внутренние силовые факторы в поперечных сечениях, составляющих ее стержень, не могут быть определены только из уравнений статики. Причиной статической неопределимости является наличие в системе лишних связей, то есть таких связей, которые необязательны для обеспечения геометрической неизменяемости системы. Лишними связями могут служить дополнительные опоры, например, шарнирно-подвижные опоры (рис. 10).

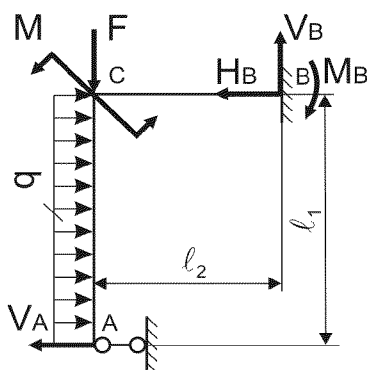


Рис. 10 Статически неопределимая система

Системы, подобные изображенной, называют внешне статически неопределимыми в том смысле, что уравнений статики недостаточно для определения опорных реакций «лишних» связей, являющихся внешними силами.

Общее количество «лишних» связей (как внешних, так и внутренних) называется степенью статической неопределимости системы. Так, заданная система один раз статически неопределима.

Расчет статической неопределимости системы начинают с выяснения степени ее статической неопределимости. Для сравнительно простых рам, рассматриваемых в курсе сопротивления материалов, степень статической неопределимости в подавляющем большинстве случаев можно установить, подсчитав, сколько связей нужно отбросить, для того, чтобы заданная статически неопределимая система превратилась в статически определимую.

Для раскрытия статической неопределимости систему освобождают от

«лишних» связей, превращая тем самым заданную статически неопределимую систему в геометрически неизменяемую статически определимую систему, называемую *основной системой* (рис. 11).

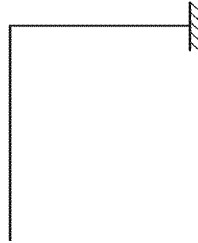


Рис. 11 Основная система

Основная система, к которой приложены заданные внешние силы и реакции отброшенных связей, *эквивалентна* заданной системе, то есть в ней возникают такие же внутренние силовые факторы и такие же перемещения, как и в заданной системе. Указанное обстоятельство используется для определения лишних неизвестных. Действительно, в заданной системе не может быть перемещений в направлениях имеющихся в ней связей, следовательно, и в основной системе перемещения в направлениях отброшенных связей, вызванные действием заданных сил и искомым лишним неизвестным, должны быть равны нулю. Иными словами, реакции отброшенных связей должны иметь такие значения, при которых перемещения по их направлениям равнялись бы нулю.

Математическими выражениями сформулированного положения являются уравнения перемещений. Так, для один раз статически неопределимой рамы можно выбрать в качестве основной системы раму с отброшенной шарнирно-подвижной опорой и принять за лишнюю неизвестную реактивную силу X_1 указанной опоры. Основная система, нагруженная заданными силами и лишней неизвестной, представлена на рис. 12. Перемещение $\Delta_{A\Sigma P_i}$ по направлению X_1 равно нулю.

Применяя принцип независимости действия сил, можем записать уравнение перемещений в виде:

$$\Delta_{A\Sigma P_i} = \Delta_{AX_1} + \Delta_{A\Sigma P_i}^{zp} = 0, \quad (20)$$

где Δ_{AX_1} – перемещение по направлению отброшенной связи в опоре A от действия силы X_1 ;

$\Delta_{A\Sigma P_i}^{ep}$ – перемещение в том же направлении от действия заданной нагрузки.

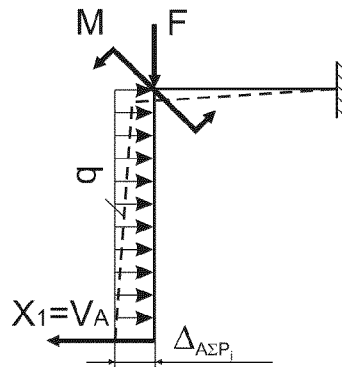


Рис. 12 Эквивалентная система и ее возможные деформации

В данной работе определение перемещений производится методом Мора и с использованием метода Верещагина, поэтому оказывается удобным выразить перемещение Δ_{AX_1} через перемещение δ_{11} от единичных сил, умножая его на лишнюю неизвестную X_1 . Таким образом, для рассматриваемой линейно-деформируемой системы будем иметь:

$$\Delta_{AX_1} = X_1 \cdot \delta_{11}.$$

Так как $\Delta_{1\Sigma P_i}^{ep}$ – перемещение по направлению силы $P^0 = 1$ от действия всей внешней нагрузки, переходим к другой форме записи уравнения (20):

$$\Delta_{AX_1} = X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{1\Sigma P_i}^{ep} = 0. \quad (21)$$

Первый индекс у каждого из перемещений указывает номер единичной силы или момента, в направлении которого происходит данное перемещение; второй индекс указывает причину, вызывающую перемещение по тому же направлению.

Уравнения перемещений носят название *канонических уравнений метода сил*. Каноническими эти уравнения называются потому, что составляются они всегда по одному и тому же правилу (канону) и их вид зависит от степени статической неопределимости системы и не зависит от ее конкретных особенно-

стей. Указание, что уравнения относятся к методу сил, подчеркивает, что искомыми неизвестными, определяемыми из этих уравнений, являются силы или моменты от действия сил. Уравнение записано для системы с одним лишним неизвестным; аналогично могут быть составлены системы канонических уравнений при любом другом числе лишних неизвестных:

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \Delta_{1\Sigma P_i}^{ep.} = 0; \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \Delta_{2\Sigma P_i}^{ep.} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Наиболее надежной проверкой правильности определения лишних неизвестных и построения эпюр внутренних силовых факторов для заданной системы является ее повторное решение при другом выборе основной системы. Совпадение окончательных эпюр, полученных в результате двух указанных решений, является гарантией их правильности.

Большая трудоемкость такой проверки заставляет в большинстве случаев от нее отказаться, ограничиваясь так называемыми статической и деформационной проверками.

Первая из них заключается в проверке равновесия некоторой отсеченной части рамы под действием приложенных к ней внешних сил и внутренних силовых факторов, заменяющих действие отброшенных частей рамы на оставленную.

При деформационной проверке производится перемножение окончательной эпюры изгибающих моментов, построенной для заданной системы, на единичную эпюру. Результат указанного перемножения должен быть равен нулю.

ТЕМЫ И ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Расчетно-графическая работа № 1 «Расчет элементов конструкций»

Задание 1 Осевое растяжение (сжатие) стержня

Расчетные схемы изображены на рис. 13, исходные данные выбираются из табл. 1.

Для ступенчатого стального стержня (модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, удельный вес $\gamma = 78 \text{ кН / м}^3$) требуется:

1. Построить эпюру продольных сил.
2. Подобрать размеры поперечного сечения стержня при допуске напряжении $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$;
3. Составить аналитические выражения, с учетом действия собственного веса и построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений.
3. Вычислить величину продольной деформации каждого участка.
4. Определить полную абсолютную деформацию стержня.

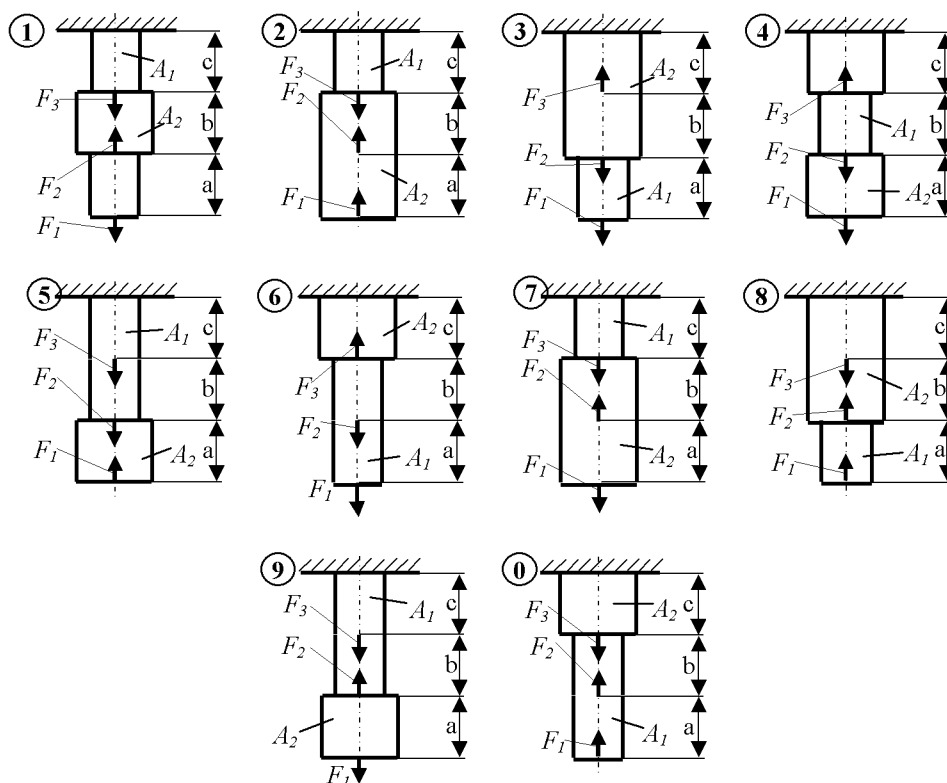
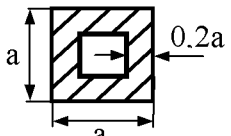
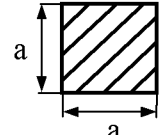
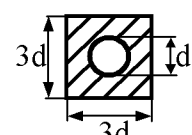
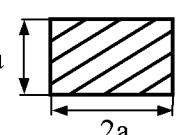
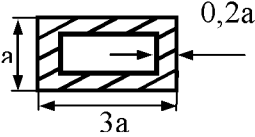
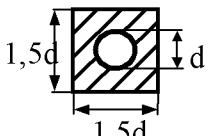
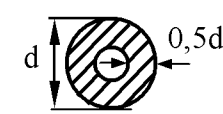
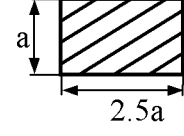
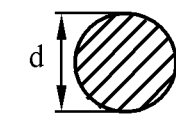
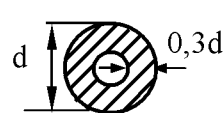


Рис. 13 Расчетные схемы к заданию № 1

Таблица 1 Исходные данные к заданию № 1

| | A_1/A | F_1 | F_2 | F_3 | a | b | c | Поперечное сечение |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---|
| | | | | | | | | |
| № | 0,9 | 1100 | 1200 | 2000 | 1,0 | 0,9 | 0,6 |  |
| 2 | 0,8 | 1200 | 1300 | 1900 | 1,2 | 0,8 | 0,7 |  |
| 3 | 0,7 | 1300 | 1000 | 1800 | 1,3 | 0,7 | 0,8 |  |
| 4 | 0,6 | 1400 | 800 | 1700 | 1,4 | 0,6 | 0,9 |  |
| 5 | 0,5 | 1500 | 900 | 1600 | 1,5 | 0,5 | 1,5 |  |
| 6 | 0,6 | 1600 | 700 | 1500 | 0,9 | 1,0 | 1,4 |  |
| 7 | 0,7 | 1700 | 600 | 1400 | 0,8 | 1,2 | 1,3 |  |
| 8 | 0,8 | 1800 | 500 | 1300 | 0,7 | 1,3 | 1,2 |  |
| 9 | 0,9 | 1900 | 1100 | 1200 | 0,6 | 1,4 | 1,0 |  |
| 0 | 0,5 | 2000 | 400 | 1100 | 0,5 | 1,5 | 1,0 |  |
| | д | е | д | е | д | е | д | е |

Задание 2 Кручение стержня круглого поперечного сечения

Расчетная схема изображена на рис. 14, исходные данные выбираются из табл. 2.

Стальной вал равномерно вращается, передавая крутящие моменты M_2 , M_3 и M_4 через ведомые шкивы на различные механизмы.

Требуется:

1. Определить крутящий момент M_1 на ведущем шкиве.
2. Построить эпюру крутящих моментов.
3. Определить рациональное расположение шкивов на валу.
4. Подобрать диаметр вала в опасном сечении.
5. Проверить прочность вала при кручении.
6. Определить деформации в характерных сечениях вала и построить эпюру углов закручивания ($G = 8 \cdot 10^4$ МПа).
7. Проверить вал на жесткость по максимальным деформациям.

Таблица 2 Исходные данные к заданию № 2

| № | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | M_2 | M_3 | M_4 | $[\tau]$ |
|----------|-----------|----------|----------|------------|----------|----------|------------|
| | <i>мм</i> | | | <i>Н·м</i> | | | <i>МПа</i> |
| 1 | 40 | 31 | 30 | 200 | 110 | 200 | 30 |
| 2 | 49 | 32 | 39 | 190 | 120 | 190 | 35 |
| 3 | 48 | 33 | 38 | 180 | 130 | 180 | 40 |
| 4 | 47 | 34 | 37 | 170 | 140 | 170 | 45 |
| 5 | 46 | 35 | 36 | 160 | 150 | 160 | 50 |
| 6 | 45 | 36 | 35 | 150 | 160 | 150 | 55 |
| 7 | 44 | 37 | 34 | 140 | 170 | 140 | 60 |
| 8 | 43 | 38 | 33 | 130 | 180 | 130 | 65 |
| 9 | 42 | 39 | 32 | 120 | 190 | 120 | 70 |
| 0 | 41 | 30 | 31 | 110 | 200 | 110 | 75 |
| | д | е | д | е | д | е | д |

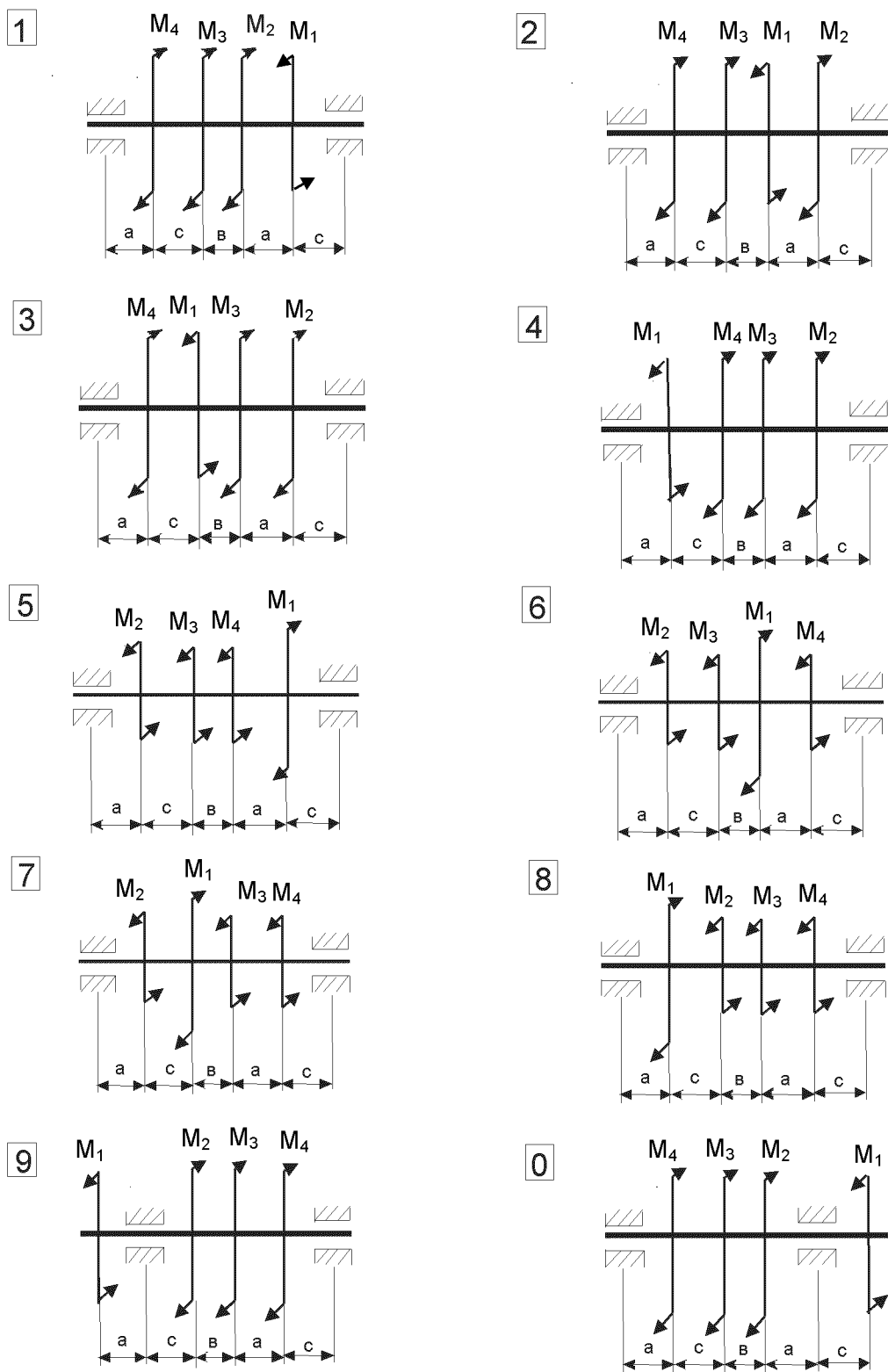


Рис. 14 Расчетные схемы к заданию № 2

Задание 3 Расчет на прочность при изгибе

Расчетная схема изображена на рис. 15, исходные данные выбираются из табл. 3.

Для заданной схемы балки требуется:

1. Определить значения опорных реакций
2. Построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x .
3. По допускаемым напряжениям $[\sigma]$ подобрать размеры заданных профилей поперечного сечения.

4. По выбранным размерам поперечного сечения вычислить нормальные напряжения и сравнить их с допускаемыми напряжениями, при этом перегрузка не должна превышать 5 %.

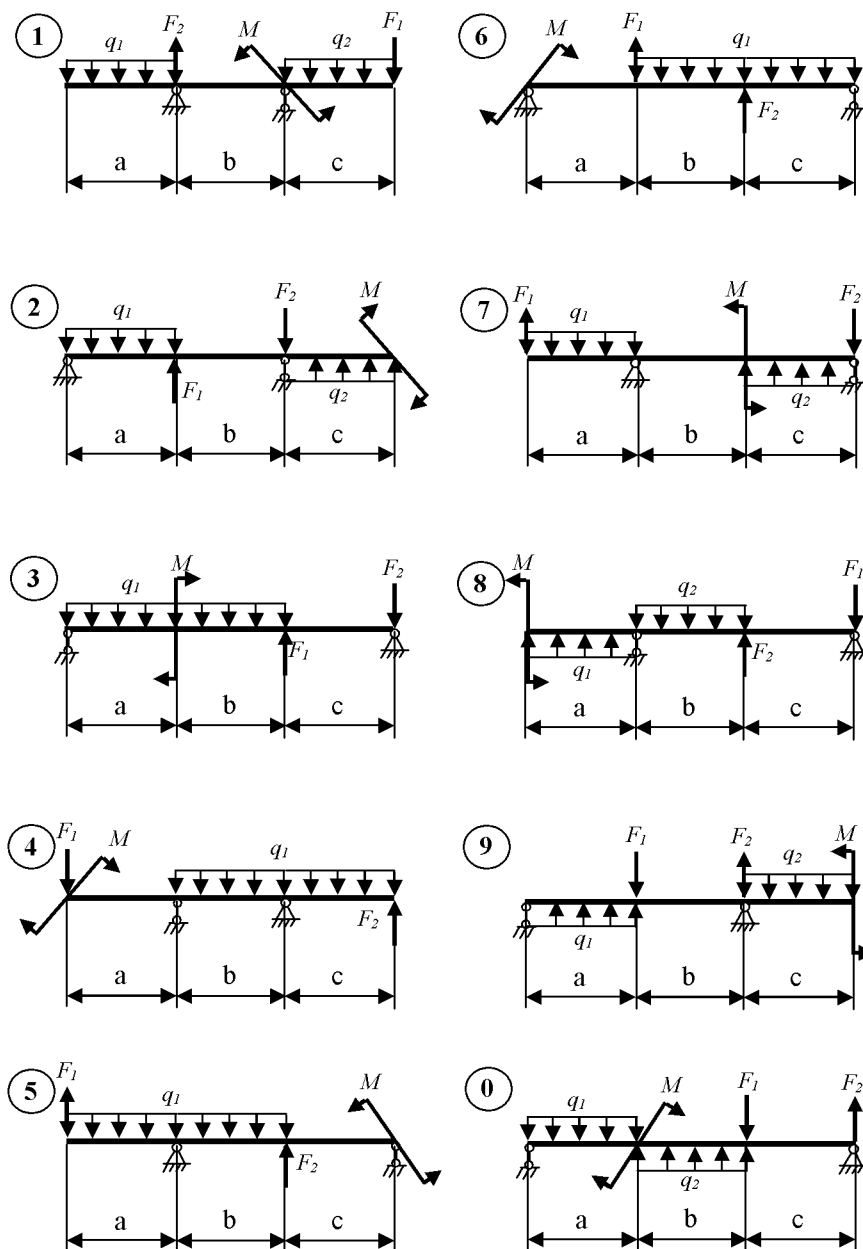
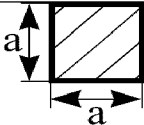

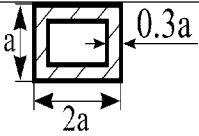
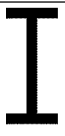
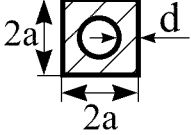

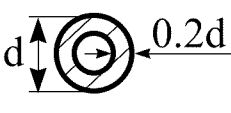

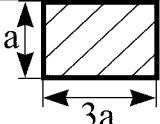

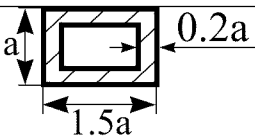
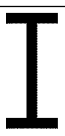
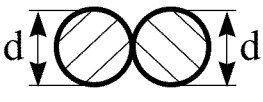

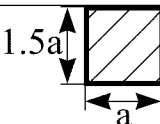

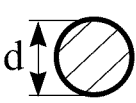

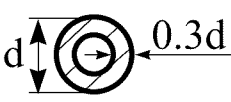



Рис. 15 Расчетные схемы к заданию № 3

Таблица 3 Исходные данные к заданию № 3

| № | M | F | q | a | b | c | $[\sigma]$ | Поперечное сечение | |
|---|------|-----|------|-----|-----|-----|------------|---|---|
| | кН·м | кН | кН/м | м | м | м | МПа | | |
| 1 | 18 | 30 | 8 | 2,6 | 1,0 | 3,0 | 160 |  |  |
| 2 | 20 | 28 | 10 | 2,4 | 1,2 | 2,8 | 155 |  |  |
| 3 | 22 | 26 | 12 | 2,2 | 1,4 | 2,6 | 150 |  |  |
| 4 | 24 | 24 | 14 | 2,0 | 1,6 | 2,4 | 145 |  |  |
| 5 | 26 | 22 | 16 | 1,8 | 1,8 | 2,2 | 140 |  |  |
| 6 | 28 | 20 | 18 | 1,6 | 2,0 | 2,0 | 135 |  |  |
| 7 | 30 | 18 | 20 | 1,4 | 2,2 | 1,8 | 140 |  |  |
| 8 | 32 | 16 | 22 | 1,2 | 2,4 | 1,6 | 145 |  |  |
| 9 | 34 | 14 | 24 | 1,0 | 2,6 | 1,4 | 150 |  |  |
| 0 | 36 | 12 | 26 | 3,0 | 2,8 | 1,2 | 160 |  |  |
| | д | е | д | е | д | е | д | е | д |

Расчетно-графическая работа № 2

Расчет статически неопределимой системы

Задание состоит из одной задачи, расчетная схема изображена на рис. 16, исходные данные выбираются из табл. 4.

Задано: стальная конструкция (рама), допускаемые напряжения – $[\sigma] = 160 \text{ МПа} = 1600 \text{ кгс} / \text{см}^2$, $[\tau] = 50 \text{ МПа} = 500 \text{ кгс} / \text{см}^2$.

Требуется:

1. Вычертить заданную схему элемента с приложенными нагрузками, соблюдая масштаб длин, проставить значения размеров и нагрузок.

2. Раскрыть степень статической неопределимости элемента.

3. Выбрать основную и эквивалентную системы. Используя принцип независимости действия сил, разложить эквивалентную систему на грузовую и систему, нагруженную неизвестной реакцией X_1 .

4. Построить единичную систему и изобразить на расчетных схемах деформацию осей всех систем и перемещения δ_{11} , $\Delta_{1\Sigma P_i}^{ep.}$ и Δ_{1X_1} написать условие совместности деформаций ($\Delta_{1\Sigma P_i} = 0$).

5. Написать каноническое уравнение метода сил – уравнение совместности деформаций $X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{1\Sigma P_i}^{ep.} = 0$.

6. Определить значения изгибающих моментов грузовой и единичной систем и построить эпюры.

7. Определить неизвестные коэффициенты канонического уравнения δ_{11} и $\Delta_{1\Sigma P_i}^{ep.}$ методами Мора и Верещагина, найти неизвестную реакцию X_1 .

8. Вычислить значения внутренних усилий на каждом силовом участке и построить окончательные эпюры.

9. Сделать статическую проверку.

10. Сделать проверку равенства нулю перемещения по направлению отброшенной связи ($\Delta_{1\Sigma P_i} = 0$), подтверждающую правильность определения реакции $X_1 = V_A$, используя методы Мора и Верещагина.

11. Подобрать поперечные сечения конструкции, состоящей из двутавровой балки и проверить конструкцию на прочность по касательным напряжениям.

Таблица 4 Исходные данные к расчетно-графической работе № 2

| № | Длина участков, <i>м</i> | | | Заданная нагрузка | | |
|----------|--------------------------|----------------------|----------------------|-------------------|------------------|------------------|
| | <i>l₁</i> | <i>l₂</i> | <i>l₃</i> | <i>F, кН</i> | <i>M, кН · м</i> | <i>q, кН / м</i> |
| 1 | 1,0 | 2,0 | 2,8 | 10 | 20 | 10 |
| 2 | 1,2 | 2,2 | 2,6 | 12 | 22 | 12 |
| 3 | 1,4 | 2,4 | 2,4 | 14 | 24 | 14 |
| 4 | 1,6 | 2,6 | 2,2 | 16 | 26 | 16 |
| 5 | 1,8 | 2,8 | 2,0 | 18 | 28 | 18 |
| 6 | 2,0 | 1,0 | 1,8 | 20 | 10 | 20 |
| 7 | 2,2 | 1,2 | 1,6 | 22 | 12 | 22 |
| 8 | 2,4 | 1,4 | 1,4 | 24 | 14 | 24 |
| 9 | 2,6 | 1,6 | 1,2 | 26 | 16 | 26 |
| 0 | 2,8 | 1,8 | 1,0 | 28 | 18 | 28 |
| | д | е | д | е | д | е |

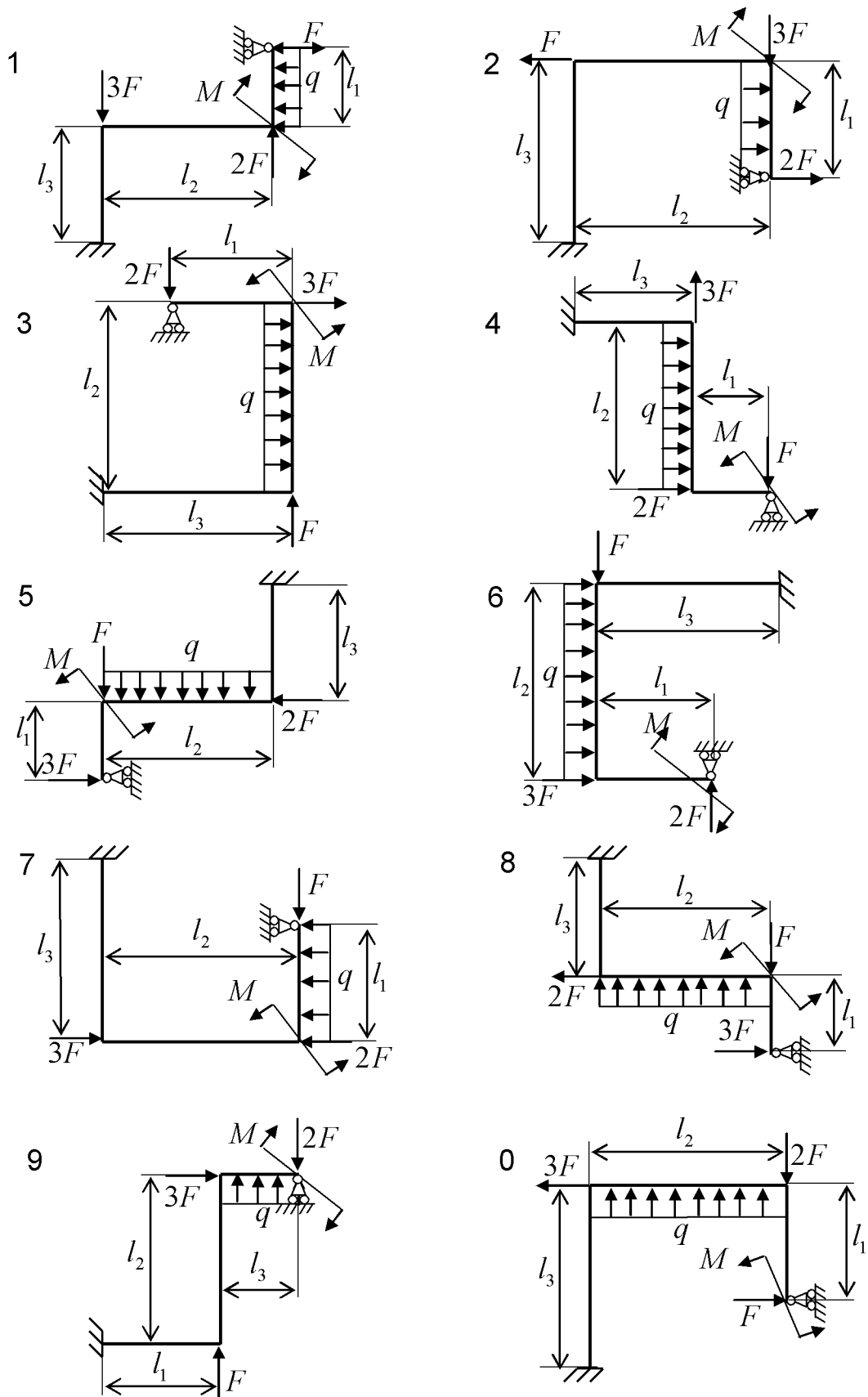


Рис. 16 Расчетные схемы к расчетно-графической работе № 2

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Расчетно-графическая работа № 1 «Расчет элементов конструкций»

Задание 1 Осевое растяжение (сжатие) стержня

Ступенчатый стальной стержень (рис. 17) находится под действием продольных сил и сил тяжести.

Задано: $F_1 = 1000 \text{ кН}$, $F_2 = 2000 \text{ кН}$, $F_3 = 3000 \text{ кН}$, $a = 1 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$, $c = 3 \text{ м}$.

Расчёт начинаем с определения количества участков, подлежащих рассмотрению. Так как продольные силы N и напряжения σ зависят от внешних сил, площади поперечного сечения и удельного веса материала, то границами участков будут точки приложения внешних сил и места изменения сечения.

Исходя из этого, для рассматриваемого ступенчатого стержня следует принять 3 силовых участка.

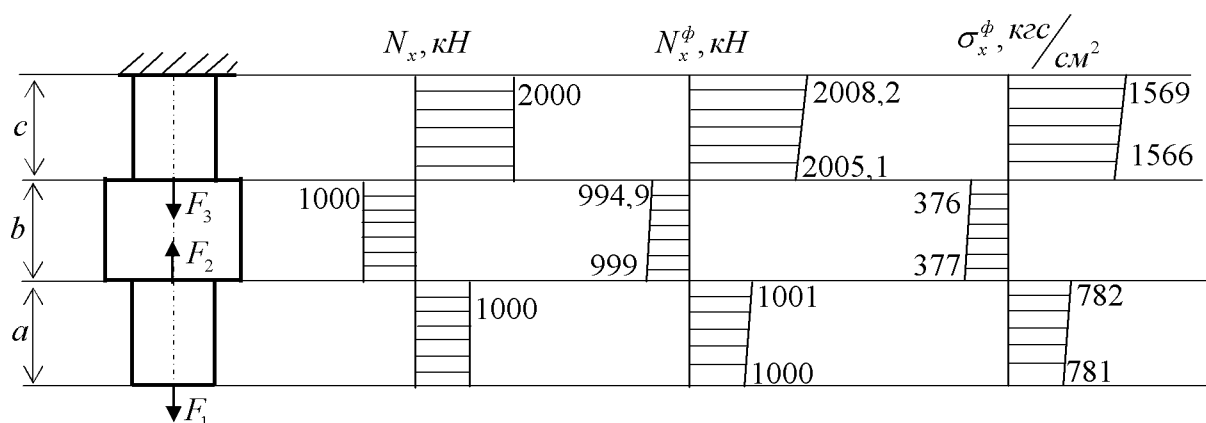


Рис. 17 Расчетная схема, эпюры N и σ

1. Определяем для каждого участка величину продольной силы, применяя метод сквозного разреза (сечений). Для этого в произвольном месте на силовом участке проведём сечение перпендикулярно оси стержня и рассмотрим условие равновесия нижней части. Действие отброшенной части на оставшуюся заменяем внутренней продольной силой $N(x)$.

Составим уравнение равновесия для первого участка:

$$-N(x_1) + F_1 = 0;$$

$$N(x_1) = F_1 = 1000 \text{ кН}.$$

Проведя сечения на следующих участках и рассматривая равновесие частей стержня, получим:

$$-N(x_2) + F_1 - F_2 = 0;$$

$$N(x_2) = F_1 - F_2 = 1000 - 2000 = -1000 \text{ кН}.$$

$$-N(x_3) + F_1 - F_2 + F_3 = 0;$$

$$N(x_3) = F_1 - F_2 + F_3 = 1000 - 2000 + 3000 = 2000 \text{ кН}.$$

Строим эпюру продольных сил.

2. Подбор размеров допускаемого поперечного сечения производим по критерию прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_{\max}|}{A_{\text{необх.}}} \leq [\sigma].$$

Производим расчет площади поперечного сечения того участка, где действует наибольшая продольная сила, в данном примере участок с площадью A_1 :

$$A_1^{\text{необх.}} = \frac{|N_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{2000 \text{ кН}}{160 \text{ МПа}} = \frac{2000 \cdot 10^2 \text{ кгс}}{1600 \text{ кгс / см}^2} = 125 \text{ см}^2;$$

$$A_1^{\text{необх.}} = 2a_1^2.$$

Основание $a_1^{\text{необх.}}$ равно:

$$a_1^{\text{необх.}} = \sqrt{\frac{A_1^{\text{необх.}}}{2}} = \sqrt{\frac{125}{2}} = 7,9 \text{ см}.$$

Принимаем $a_1^{\text{факт.}} = 8 \text{ см}$. Тогда $A_1^{\text{факт.}} = 2a_1^2 = 2 \cdot 8^2 = 128 \text{ см}^2$.

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_{\max}|}{A_1^{\text{факт.}}} = \frac{2000 \cdot 10^2}{128} = 1562,5 \text{ кгс / см}^2.$$

Определяем перегрузку (недогрузку):

$$\Delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{1562,5 - 1600}{1600} \cdot 100\% = -2,34\%.$$

Перегрузка (недогрузка) не должна превышать $\pm 5\%$.

Из соотношения $\frac{A_1}{A_2} = 0,5$ определяем площадь поперечного сечения:

$$A_2^{\text{необх.}} = \frac{A_1^{\text{факт.}}}{0,5} = \frac{128}{0,5} = 256 \text{ см}^2.$$

$$\text{Тогда } a_2^{\text{необх.}} = \sqrt{\frac{A_2^{\text{необх.}}}{2}} = \sqrt{\frac{256}{2}} = 11,3 \text{ см}.$$

$$\text{Принимаем } a_2^{\text{факт.}} = 11,5 \text{ см}. \text{ Тогда } A_2^{\text{факт.}} = 2a_2^2 = 2 \cdot 11,5^2 = 264,5 \text{ см}^2.$$

3. Составляем аналитические выражения продольных сил и нормальных напряжений с учетом действия собственного веса для всех силовых участков.

Для удобства расчета площадь поперечного сечения переводим в м^2 : $1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2$, расчет напряжений проводим в МПа : $1 \text{ МПа} = 1000 \text{ кН} / \text{м}^2$.

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$$

$$N(x_1) = F_1 + \gamma \cdot A_1^{\text{факт.}} \cdot x_1 = 1000 + 78 \cdot 128 \cdot 10^{-4} \cdot x_1 = 1000 + 0,998 \cdot x_1 \left| \begin{array}{l} 1 \text{ м} = 1001 \text{ кН} \\ 0 \text{ м} = 1000 \text{ кН} \end{array} \right.$$

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{A_1^{\text{факт.}}} = \frac{(1000 + 0,998 \cdot x_1) \cdot 10^3}{128 \cdot 10^{-4}} \left| \begin{array}{l} 1 \text{ м} = 78,2 \text{ МПа} \\ 0 \text{ м} = 78,1 \text{ МПа} \end{array} \right.$$

$$0 \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$$

$$N(x_2) = N(x_1) - F_2 + \gamma \cdot A_2^{\text{факт.}} \cdot x_2 = 1001 - 2000 + 78 \cdot 264,5 \cdot 10^{-4} \cdot x_2 = \\ = -999 + 2,06 \cdot x_2 \left| \begin{array}{l} 2 \text{ м} = -994,9 \text{ кН} \\ 0 \text{ м} = -999 \text{ кН} \end{array} \right.$$

$$\sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{A_2^{\text{факт.}}} = \frac{(-999 + 2,06 \cdot x_2) \cdot 10^3}{264,5 \cdot 10^{-4}} \left| \begin{array}{l} 2 \text{ м} = -37,6 \text{ МПа} \\ 0 \text{ м} = -37,7 \text{ МПа} \end{array} \right.$$

$$0 \leq x_3 \leq 3 \text{ м}$$

$$N(x_3) = N(x_2) + F_3 + \gamma \cdot A_1^{\text{факт.}} \cdot x_3 = -994,9 + 3000 + 78 \cdot 128 \cdot 10^{-4} \cdot x_3 = \\ = 2005,1 + 0,998 \cdot x_3 \left| \begin{array}{l} 3 \text{ м} = 2008,1 \text{ кН} \\ 0 \text{ м} = 2005,1 \text{ кН} \end{array} \right.$$

$$\sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{A_1^{\text{факт.}}} = \frac{(2005,1 + 0,998 \cdot x_3) \cdot 10^3}{128 \cdot 10^{-4}} \left| \begin{array}{l} 3 \text{ м} = 156,9 \text{ МПа} \\ 0 \text{ м} = 156,6 \text{ МПа} \end{array} \right.$$

Строим эпюры продольных сил и нормальных напряжений.

4. Определяем полную абсолютную деформацию стержня.

Перемещение нижнего конца стержня складывается из деформаций его участков

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3.$$

Деформации каждого участка стержня, находящегося под действием внешних сил и сил тяжести, определяем по закону Гука.

Деформация участка длиной a получит деформацию от действия собственного веса G_1 участка длиной a и внешней силы F_1

$$\Delta l_1 = \frac{(F_1 + G_1 / 2) \cdot a}{E \cdot A_1^{\text{факт.}}},$$

где $G_1 = A_1^{\text{факт.}} \cdot \gamma \cdot a = 128 \cdot 10^{-4} \cdot 78 \cdot 1 = 0,998 \text{ кН}$ – собственный вес первого участка.

$$\Delta l_1 = \frac{(1000 + 0,998 / 2) \cdot 1}{2 \cdot 10^8 \cdot 128 \cdot 10^{-4}} = 3,9 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

На первом участке стержень удлиняется.

Деформация участка длиной b будет складываться из деформаций от действия внешней силы G_1 (сила тяжести первого участка по отношению ко второму будет выступать в данном случае в виде внешней силы), внешних сил F_1, F_2 а также от действия собственного веса G_2 .

$$\Delta l_2 = \frac{(F_1 - F_2 + G_1 + G_2 / 2) b}{E \cdot A_2^{\text{факт.}}},$$

где $G_2 = A_2^{\text{факт.}} \cdot \gamma \cdot b = 264,5 \cdot 10^{-4} \cdot 78 \cdot 2 = 4,12 \text{ кН}$ – собственный вес второго участка.

$$\Delta l_2 = \frac{(1000 - 2000 + 0,998 + 4,12 / 2) \cdot 2}{2 \cdot 10^8 \cdot 264,5 \cdot 10^{-4}} = -3,77 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

На втором участке стержень также удлиняется.

Деформация участка длиной c будет складываться из деформации от действия внешних сил F_1, F_2, F_3, G_1, G_2 и от действия собственного веса G_3 .

$$\Delta l_3 = \frac{(F_1 - F_2 + F_3 + G_1 + G_2 + G_3 / 2) \cdot c}{E \cdot A_3^{\text{факт.}}},$$

где $G_3 = A_1^{\text{факт.}} \cdot \gamma \cdot c = 128 \cdot 10^{-4} \cdot 78 \cdot 3 = 3 \text{кН}$ – собственный вес третьего участка.

$$\Delta_2 = \frac{(1000 - 2000 + 3000 + 0,998 + 4,12 + 3/2) \cdot 3}{2 \cdot 10^8 \cdot 128 \cdot 10^{-4}} = 7,83 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

На третьем участке стержень получит удлинение.

Полное абсолютное удлинение стержня

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 3,9 - 3,77 + 7,83 = 7,96 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

Задание 2 Кручение стержня круглого поперечного сечения

1. Вычерчиваем расчетную схему вала с приложенными внешними моментами $M_2 = 40 \text{Нм}$, $M_3 = 120 \text{Нм}$, $M_4 = 320 \text{Нм}$, передаваемыми ведомыми шкивами (рис. 18). ($a = 20 \text{мм}$, $b = 35 \text{мм}$, $c = 30 \text{мм}$)

2. Определяем крутящий момент M_1 на ведущем шкиве. Учитывая, что вал вращается равномерно, составляем уравнение равновесия:

$$M_2 + M_3 + M_4 - M_1 = 0;$$

$$M_1 = M_2 + M_3 + M_4 = 40 + 120 + 320 = 480 \text{Нм.}$$

3. Строим эпюру крутящих моментов. Для определения величины крутящих моментов используется метод сечений.

$$T(x_1) = M_2 = 40 \text{Нм};$$

$$T(x_2) = M_2 + M_4 = 40 + 320 = 360 \text{Нм};$$

$$T(x_3) = M_2 + M_4 = 40 + 320 = 360 \text{Нм};$$

$$T(x_4) = M_2 + M_4 + M_3 = 40 + 320 + 120 = 480 \text{Нм};$$

$$T(x_5) = M_2 + M_4 + M_3 - M_1 = 40 + 320 + 120 - 480 = 0.$$

Строим эпюру крутящих моментов (рис. 18, а).

4. Определяем рациональное расположение шкивов на валу.

Рациональное расположение шкивов на валу, такое, при котором крутящие моменты будут распределены наиболее равномерно по длине вала и с наименьшими значениями.

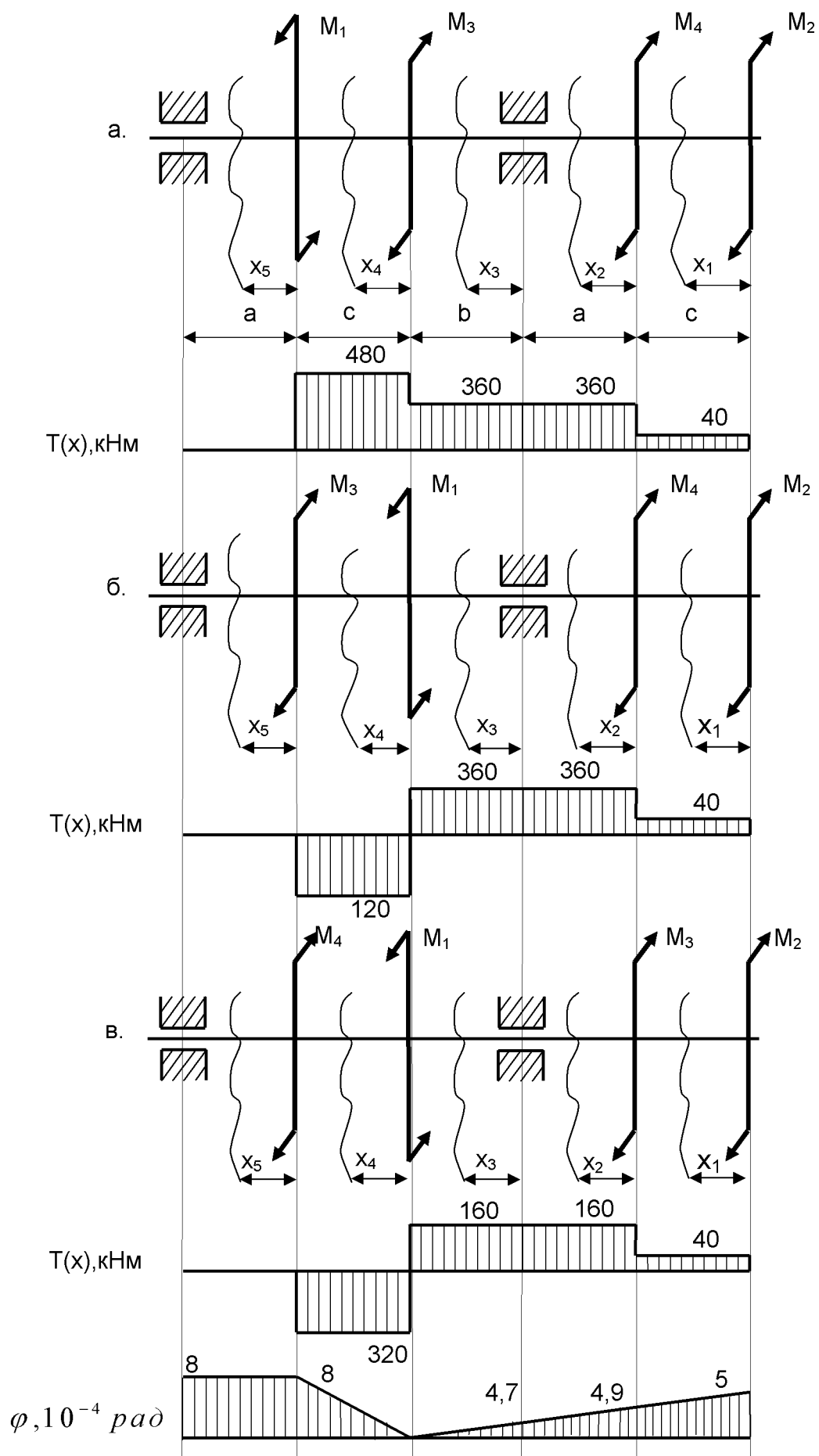


Рис. 18 Расчетная схема, эпюры T и φ

При этом ведущий шкив должен располагаться как можно ближе к центру длины вала. В результате такого расположения шкивов обеспечивается наименьший расход материала (уменьшается площадь поперечного сечения).

Рассмотрим вариант, представленный на рис. 18, б.

Определяем значения крутящих моментов $T(x)$, для данного расположения шкивов:

$$T(x_1) = M_2 = 40 \text{ Нм};$$

$$T(x_2) = M_2 + M_4 = 40 + 320 = 360 \text{ Нм};$$

$$T(x_3) = M_2 + M_4 = 40 + 320 = 360 \text{ Нм};$$

$$T(x_4) = M_2 + M_4 - M_1 = 40 + 320 - 480 = -120 \text{ Нм};$$

$$T(x_5) = M_2 + M_4 - M_1 + M_3 = 40 + 320 - 480 + 120 = 0.$$

Строим эпюру крутящих моментов для данного варианта.

Рассмотрим вариант, представленный на рис. 18, в.

Определяем значения крутящих моментов $T(x)$, для данного расположения шкивов:

$$T(x_1) = M_2 = 40 \text{ Нм};$$

$$T(x_2) = M_2 + M_3 = 40 + 120 = 160 \text{ Нм};$$

$$T(x_3) = M_2 + M_3 = 40 + 120 = 160 \text{ Нм};$$

$$T(x_4) = M_2 + M_3 - M_1 = 40 + 120 - 480 = -320 \text{ Нм};$$

$$T(x_5) = M_2 + M_3 - M_1 + M_4 = 40 + 120 - 480 + 320 = 0.$$

Строим эпюру крутящих моментов для данного варианта.

Из рассмотренных вариантов, наиболее предпочтительным будет являться схема расположения шкивов, представленная на рис. 18, в, т.к. максимальный крутящий момент T имеет наименьшее значение из рассмотренных ранее вариантов.

5. По условию прочности рассчитываем диаметр вала в опасном сечении:

$$\tau_{\max} = \frac{|T_{\max}|}{W_{\rho}} \leq [\tau].$$

Определяем необходимый полярный момент сопротивления ($[\tau] = 50 \text{ МПа}$)

$$W_{\rho}^{\text{необх.}} = \frac{|T_{\text{max}}|}{[\tau]} = \frac{320 \text{ Нм}}{50 \text{ МПа}} = \frac{3200 \text{ кгс} \cdot \text{см}}{500 \text{ кгс} / \text{см}^2} = 6,4 \text{ см}^3.$$

Для сплошного круглого сечения: $W_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2 d^3.$

Подбираем диаметр вала:

$$d^{\text{необх.}} = \sqrt[3]{\frac{W_{\rho}^{\text{необх.}}}{0,2}} = \sqrt[3]{\frac{6,4}{0,2}} = 3,17 \text{ см}.$$

Исходя из заданных по условию диаметров, принимаем $d^{\text{факт.}} = 3,5 \text{ см}.$

Определяем фактический полярный момент сопротивления

$$W_{\rho}^{\text{факт.}} = 0,2 \cdot 3,5^3 = 8,57 \text{ см}^3.$$

Определяем максимальное касательное напряжение:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{|T_{\text{max}}|}{W_{\rho}^{\text{факт.}}} = \frac{3200}{8,57} = 373,59 \text{ кгс} / \text{см}^2 \approx 37 \text{ МПа},$$

$\tau_{\text{max}} < [\tau]$, что соответствует условию прочности.

6. Определяем деформации в характерных сечениях вала

$$\varphi = \frac{T(x) \cdot l}{G \cdot J_{\rho}}.$$

Произведение $G \cdot J_{\rho}$ называется жесткостью при кручении.

Определяем полярный момент инерции сечения:

$$J_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 3,5^4}{32} = 14,72 \text{ см}^4.$$

Определяем жёсткость вала:

$$G J_{\rho} = 8 \cdot 10^5 \cdot 14,72 \approx 1,2 \cdot 10^7 \text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

Вычисляем относительные углы закручивания φ .

Учитывая, что вал вращается равномерно, расчет углов закручивания делают относительно сечения, где установлен ведущий шкив, т.е. $\varphi_c = 0$.

$$\varphi_B = \frac{T(x_4) \cdot c}{G \cdot J_\rho} = \frac{-3200 \cdot (-3)}{1,2 \cdot 10^7} = 0,0008 \text{ рад};$$

$$\varphi_A = \varphi_B + \frac{T(x_5) \cdot a}{G \cdot J_\rho} = 0,0008 + \frac{0 \cdot (-2)}{1,2 \cdot 10^7} = 0,0008 \text{ рад};$$

$$\varphi_D = \frac{T(x_3) \cdot b}{G \cdot J_\rho} = \frac{1600 \cdot 3,5}{1,2 \cdot 10^7} = 0,00047 \text{ рад};$$

$$\varphi_E = \varphi_D + \frac{T(x_2) \cdot a}{G \cdot J_\rho} = 0,0047 + \frac{1600 \cdot 2}{1,2 \cdot 10^7} = 0,00049 \text{ рад};$$

$$\varphi_F = \varphi_E + \frac{T(x_1) \cdot c}{G \cdot J_\rho} = 0,0049 + \frac{400 \cdot 3}{1,2 \cdot 10^7} = 0,0005 \text{ рад}.$$

Строим эпюру относительных углов закручивания φ .

Делаем проверку по углам закручивания.

$$\Delta\varphi = \frac{|\varphi_{\max}| \cdot 57,3^\circ}{l_{\text{полн.}}} = \frac{0,0005 \cdot 57,3^\circ}{0,085 \text{ м}} = 0,33^\circ.$$

Задание 3 Расчет на прочность при изгибе

1. Вычерчиваем расчетную схему балки с заданными нагрузками (рис. 19), соблюдая масштаб длины участков. Проставляем числовые значения.
2. Изображаем опорные реакции, возникающие в опорах балки. Вычисляем их величину:

$$\sum F_x = 0; \quad H_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad -q_1 \cdot \frac{(a+b)^2}{2} + M + R_B \cdot (a+b) - F_2 \cdot (a+b) + F_1 \cdot (a+b+c) = 0;$$

$$R_B = \frac{q_1 \cdot (a-b)^2 - M + F_2 \cdot (a+b) - F_1 \cdot (a+b+c)}{(a+b)} =$$

$$= \frac{5 \cdot 3,8^2 - 20 + 18 \cdot 3,8 - 15 \cdot 4,8}{3,8} = \frac{72,2 - 20 + 68,4 - 72}{3,8} = 12,8 \text{ кН}.$$

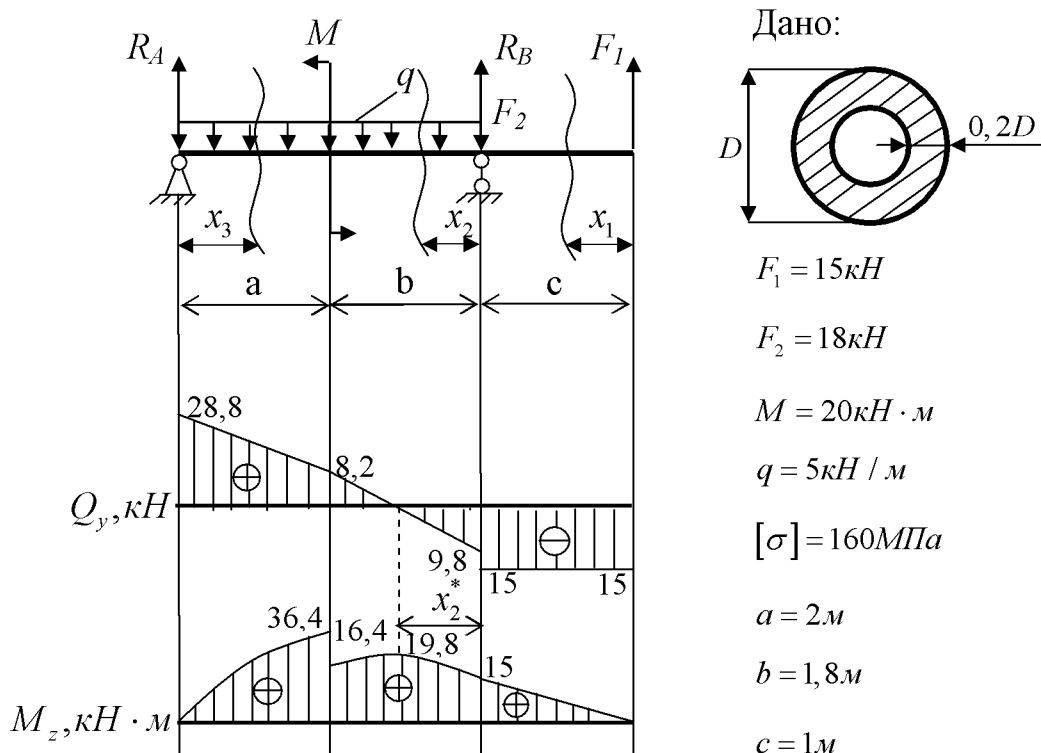


Рис. 19 Расчетная схема, эпюры Q_y и M_z

$$\sum M_B = 0; \quad q_1 \cdot \frac{(a+b)^2}{2} + M + F_1 \cdot c - R_B \cdot (a+b) = 0;$$

$$R_A = \frac{q_1 \cdot \frac{(a+b)^2}{2} + M + F_1 \cdot c}{(a+b)} = \frac{5 \cdot 3,8^2 + 20 + 15 \cdot 1}{3,8} = \frac{72,2 + 20 + 15}{3,8} = 28,2 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum F_x = 0; \quad R_A - q_1(a+b) + R_B - F_2 + F_1 = 0;$$

$$28,2 - 38 - 18 + 15 + 12,8 = 0.$$

3. Применяя метод сквозного разреза, разбиваем схему балки на силовые участки (в нашем случае их – 3). Соблюдая правило знаков, определяем значения Q_y и M_z в сечениях.

Вычисляем значения Q_y и M_z на каждом участке:

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$$

$$Q_y(x_1) = -F_1 = -15 \text{ кН}$$

$$M_z(x_1) = F \cdot x_1 = 15x_1 \Big|_{1 \text{ м}} = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$0 \leq x_2 \leq 1,8 \text{ м}$$

$$Q_y(x_2) = -F_1 + F_2 - R_B + q \cdot x_2 =$$

$$= -15 + 18 - 12,8 + 10 \cdot x_2 = -9,8 + 10 \cdot x_2 \left| \begin{array}{l} 1,8 \text{ м} = 8,2 \text{ кН} \\ 0 \text{ м} = -9,8 \text{ кН} \end{array} \right.$$

Обращаем внимание на то, что наклонная прямая, ограничивающая эпюру $Q_y(x_2)$, проходит через 0. Это означает, что на эпюре $M_z(x_2)$ надо искать точку перегиба.

Найдем ее:

$$Q_y(x_2^*) = \frac{dM(x_2)}{dx_2} = -9,8 + 10 \cdot x_2^* = 0;$$

$$x_2^* = \frac{10}{9,8} = 1,02 \text{ м.}$$

В этом сечении $M_z(x_2)$ будет иметь экстремальное значение.

$$\begin{aligned} M_z(x_2) &= F_1 \cdot (c + x_2) - F_2 \cdot x_2 + R_B \cdot x_2 - q_1 \cdot \frac{x_2^2}{2} = \\ &= 15 + 15x_2 - 18x_2 + 12,8x_2 - 5x_2^2 = 15 + 9,8x_2 - 5x_2^2 \end{aligned} \left| \begin{array}{l} 1,8 \text{ м} = 16,4 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ 1,02 \text{ м} = 19,8 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ 0 \text{ м} = 15 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{array} \right.$$

$$0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}$$

$$Q_y(x_3) = R_A - q \cdot x_3 = 28,2 - 10 \cdot x_3 \left| \begin{array}{l} 2 \text{ м} = 8,2 \text{ кН} \\ 0 \text{ м} = 28,2 \text{ кН} \end{array} \right.$$

$$M_z(x_3) = R_A \cdot x_3 - q_1 \cdot \frac{x_3^2}{2} = 28,2x_3 - 5x_3^2 \left| \begin{array}{l} 2 \text{ м} = 36,4 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ 0 \text{ м} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{array} \right.$$

По полученным значениям строим эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_z .

По условию прочности при изгибе подбираем поперечное сечение заданного профиля.

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \leq [\sigma].$$

Из данного выражения определяем момент сопротивления W_x :

$$W_x^{необ.} = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{36,4 \text{ кН} \cdot \text{м}}{160 \text{ МПа}} = \frac{36,4 \cdot 10^4 \text{ кгс} \cdot \text{см}}{1600 \text{ кгс} / \text{см}^2} = 227,5 \text{ см}^3.$$

Для кольцевого сечения:

$$W_x^{необ.} = \frac{\pi D^3}{32} \cdot (1 - c^4); \quad c = \frac{d}{D} = 0,6.$$

Внешний диаметр равен:

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi \cdot (1 - c^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 227,5}{3,14 \cdot (1 - 0,6^4)}} = 13,87 \text{ см}.$$

Принимаем $D = 14 \text{ см}$, $d = 8,4 \text{ см}$.

Вычисляем нормальные максимальные напряжения σ_{\max} и сравниваем их с допускаемыми:

$$W_x^{\text{факт.}} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} (1 - c^4) = \frac{3,14 \cdot 14^3}{32} (1 - 0,6^4) = 234,25 \text{ см}^3.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x^{\text{факт.}}} = \frac{36,4 \cdot 10^4}{234,25} = 1553,9 \text{ кгс} / \text{см}^2 \approx 155 \text{ МПа}.$$

$$\Delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{155 - 160}{160} \cdot 100\% = -3,125\%.$$

Перегрузка не превышает 5%.

По таблицам сортамента прокатной стали (ГОСТ 8239-89) подбираем двутавр, ближайшее значение момента сопротивления W_x .

Двутавр № 22, $W_x^{\text{факт.}} = 232 \text{ см}^3$.

Определяем фактическую величину нормальных напряжений и сравниваем их с допускаемыми:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x^{\text{факт.}}} = \frac{36,4 \cdot 10^4}{232} = 1568,9 \text{ кгс} / \text{см}^2 = 157 \text{ МПа}.$$

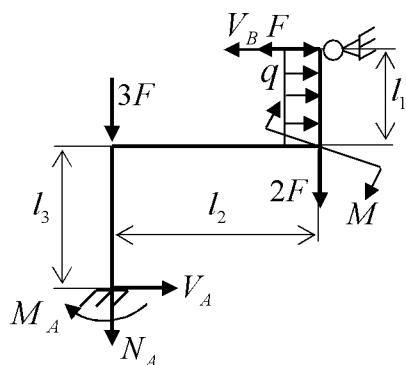
$$\Delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{157 - 160}{160} \cdot 100\% = 1,875\%.$$

Двутавр № 22 подходит.

Расчетно-графическая работа № 2

«Расчет статически неопределимой системы»

1. Вычертим заданную схему элемента (рис. 20) с приложенными нагрузками, соблюдая масштаб длин, проставим значения размеров и нагрузок.



Дано:

$$q = 6 \text{ кН / м};$$

$$F = 4 \text{ кН};$$

$$M = 7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$l_1 = 2 \text{ м};$$

$$l_2 = 3 \text{ м};$$

$$l_3 = 2,5 \text{ м}.$$

Рис. 20 Заданная схема

2. Раскрываем степень статической неопределимости.

Неизвестные реакции R : в опоре $B - V_B$, а в опоре $A: -V_A, H_A, M_A$, т. е. число реакций $R = 4$. Степень статической неопределимости равна

$$n = R - Y = 4 - 3 = 1,$$

где Y – число уравнений статики для плоской системы.

3. Выбираем основную (рис. 21), эквивалентную (рис. 22) системы.

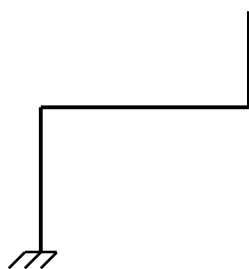


Рис. 21 Основная система

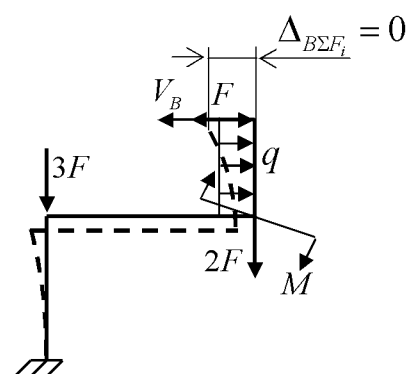


Рис. 22 Эквивалентная система и ее возможные деформации

Разбиваем эквивалентную систему на грузовую (рис. 23) и систему, нагруженную силой $X_1 = V_B$ (рис. 24).

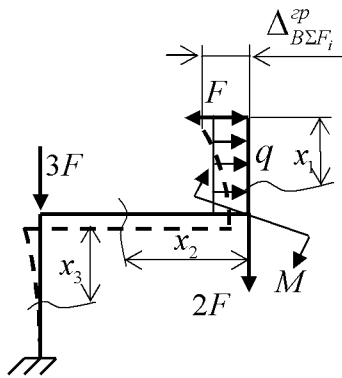


Рис. 23 Грузовая система и ее деформации под действием внешней нагрузки

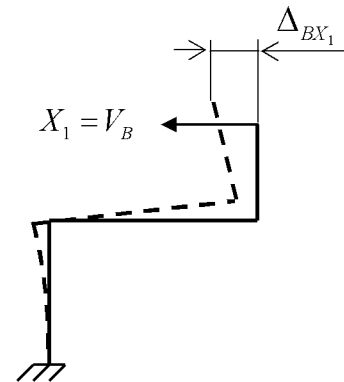


Рис. 24 Система, нагруженная силой X_1 , и деформация под действием этой нагрузки

4. Строим единичную систему и изображаем на расчетных схемах деформацию осей всех систем и перемещения δ_{11} , $\Delta_{1\Sigma P_i}^{zp}$, Δ_{1X_1} , напишем условие совместности деформаций ($\Delta_{1\Sigma P_i} = 0$).

Для нахождения перемещения Δ_{BX_1} (рис. 24) необходимо (в соответствии с методами Мора и Верещагина) в т. В основной системы приложить силу $P^0 = 1$ по направлению неизвестной реакции X_1 , получим единичную систему, перемещение (деформация) которой будет равно δ_{11} (рис. 25).

Тогда

$$\Delta_{AX_1} = X_1 \cdot \delta_{11}.$$

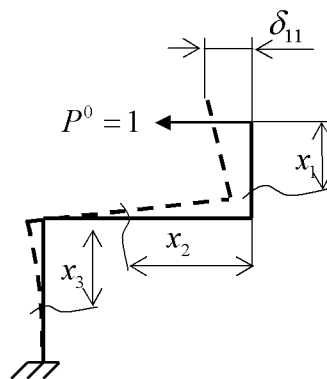


Рис. 25 Единичная система

Деформацию $\Delta_{B\Sigma P_i}^{zp}$ (рис. 23) обозначим как $\Delta_{1\Sigma P_i}^{zp}$ – перемещение по направлению силы $P^0 = 1$ от действия всей внешней нагрузки, затем подсчитываем методами Мора и Верещагина.

Используя принцип независимости действия сил, условие совместности деформаций запишем в виде:

$$\Delta_{B\Sigma P_i} = \Delta_{BX_1} + \Delta_{B\Sigma P_i}^{zp} = 0.$$

5. Напишем каноническое уравнение метода сил – уравнение совместности деформаций.

Для этого, подставив значения Δ_{1X_1} и $\Delta_{1\Sigma P_i}^{zp}$, в условие совместности деформаций, получим каноническое уравнение метода сил для одного неизвестного:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{1\Sigma P_i}^{zp} = 0.$$

6. Определим значения изгибающих моментов грузовой и единичной систем и построим эпюры.

Разбиваем грузовую и единичную системы на одинаковые силовые участки и составляем необходимые уравнения.

Грузовая система:

$$0 \leq x_1 \leq 2m$$

$$\begin{aligned} M(x_1) &= F \cdot x_1 - q \frac{x_1^2}{2} = 4 \cdot x_1 - \frac{6x_1^2}{2} = \\ &= 4 \cdot x_1 - 10x_1^2 \left| \begin{array}{l} 2m = -4кНм \\ 0m = 0кНм \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$0 \leq x_2 \leq 3m$$

$$\begin{aligned} M(x_2) &= F \cdot l_1 - q \cdot \frac{l_1^2}{2} + M - 2F \cdot x_2 = \\ &= 8 - 12 + 7 - 8 \cdot x_2 = 3 - 8 \cdot x_2 \left| \begin{array}{l} 3m = -21кНм \\ 0m = 3кНм \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$0 \leq x_3 \leq 2,5m$$

$$\begin{aligned} M(x_3) &= F \cdot (l_1 + x_3) - q \cdot l_1 \left(\frac{l_1}{2} + x_3 \right) + M - \\ &- 2F \cdot l_2 = 8 + 4 \cdot x_3 - 12 - 12 \cdot x_3 + 7 - 24 = \\ &= -8 \cdot x_3 - 21 \left| \begin{array}{l} 2,5m = -41кНм \\ 0m = -21кНм \end{array} \right. \end{aligned}$$

Единичная система:

$$\begin{aligned} M^0(x_1) &= P \cdot x_1 = 1 \cdot x_1 = \\ &= x_1 \left| \begin{array}{l} 2m = 2m \\ 0m = 0m \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$M^0(x_2) = P^0 \cdot l_1 = 1 \cdot l_1 = 2m$$

$$\begin{aligned} M^0(x_3) &= P^0 \cdot (l_1 + x_3) = \\ &= 2 + x_3 \left| \begin{array}{l} 2,5m = 4,5m \\ 0m = 2m \end{array} \right. \end{aligned}$$

Строим эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки и единичной силы (рис. 26).

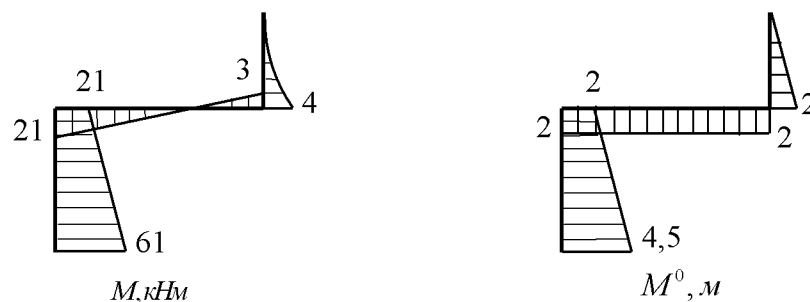


Рис. 26 Эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки

7. Определяем неизвестные канонического уравнения δ_{11} и $\Delta_{1\Sigma P_i}^{ep.}$ методами Мора и Верещагина, находим неизвестную реакцию X_1 .

Принимаем жесткость всех элементов постоянной, т.е. $EJ - const$.

1) Определяем перемещения δ_{11} методом Мора:

$$\delta_{11} \cdot EJ = \sum_L \int M^0(x_i) \cdot M^0(x_i) \cdot dx_i,$$

где $M^0(x_i)$ – значение изгибающего момента на i - том силовом участке от действия единичной силы.

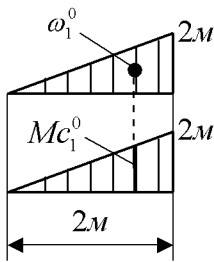
$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot EJ &= \int_L M^0(x_i) \cdot M^0(x_i) \cdot dx_i = \int_0^2 M^0(x_1) \cdot M^0(x_1) \cdot dx_1 + \\ &+ \int_0^3 M^0(x_2) \cdot M^0(x_2) \cdot dx_2 + \int_0^{2,5} M^0(x_3) \cdot M^0(x_3) \cdot dx_3 = \\ &= \int_0^2 x_1 \cdot x_1 \cdot dx_1 + \int_0^3 2 \cdot 2 \cdot dx_2 + \int_0^{2,5} (2 + x_3) \cdot (2 + x_3) \cdot dx_3 = \\ &= \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^2 + 4 \cdot x_2 \Big|_0^3 + 4 \cdot x_3 \Big|_0^{2,5} + \frac{4x_3^2}{2} \Big|_0^{2,5} + \frac{x_3^3}{3} \Big|_0^{2,5} = \\ &= 2,67 + 12 + 10 + 12,5 + 5,2 = 42,37 \text{ м}^3. \end{aligned}$$

Проверка методом Верещагина:

$$\delta_{11} \cdot EJ = \sum \omega_i^0 \cdot Mc_i^0,$$

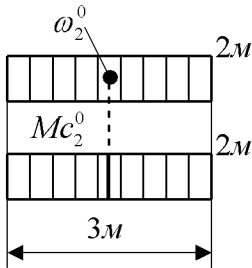
где ω_i^0 – площадь эпюры изгибающих моментов от единичной силы;

Mc_i^0 – ордината, взятая против центра тяжести эпюры изгибающих моментов от единичной силы, из той же эпюры, располагаемой под первой.



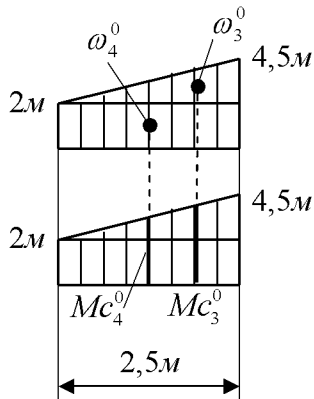
$$\omega_1^0 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ м}^2$$

$$Mc_1^0 = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 2 = 1,33 \text{ м}$$



$$\omega_2^0 = l \cdot h = 3 \cdot 2 = 6 \text{ м}^2$$

$$Mc_2^0 = 2 \text{ м}$$



$$\omega_3^0 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 2,5 = 3,125 \text{ м}^2$$

$$Mc_3^0 = \frac{2}{3} \cdot 2,5 + 2 = 3,67 \text{ м}$$

$$\omega_4^0 = l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 2 = 2,5 \text{ м}^2$$

$$Mc_4^0 = \frac{1}{2} \cdot 2,5 + 2 = 3,25 \text{ м}$$

$$\delta_{11} \cdot EJ = \sum \omega_i^0 \cdot Mc_i^0 = \omega_1^0 \cdot Mc_1^0 + \omega_2^0 \cdot Mc_2^0 + \omega_3^0 \cdot Mc_3^0 + \omega_4^0 \cdot Mc_4^0 = 2 \cdot 1,33 + 6 \cdot 2 + 3,125 \cdot 3,67 + 2,5 \cdot 3,25 = 2,66 + 12 + 11,47 + 8,125 = 42,38 \text{ м}^3,$$

$$\delta_{11} = \frac{42,38 \text{ м}^3}{EJ}.$$

2) Определяем перемещения $\Delta_{1\Gamma P_i}^{ep.}$ методом Мора:

$$\Delta_{1\Gamma P_i}^{ep.} \cdot EJ = \sum \int_L M(x_i) \cdot M^0(x_i) \cdot dx_i,$$

где $M(x_i)$ – значение изгибающего момента на i -том силовом участке от действия заданных сил;

$M^0(x_i)$ – значение изгибающего момента на i -том силовом участке от действия единичной силы.

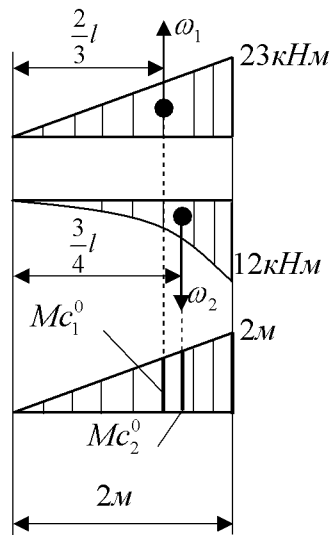
$$\begin{aligned} \Delta_{1\Sigma P_i}^{zp} \cdot EJ &= \sum \int_L M(x_i) \cdot M^0(x_i) \cdot dx_i = \int_0^2 M(x_1) \cdot M^0(x_1) \cdot dx_1 + \\ &+ \int_0^3 M(x_2) \cdot M^0(x_2) \cdot dx_2 + \int_0^{2,5} M(x_3) \cdot M^0(x_3) \cdot dx_3 = \int_0^2 (4 \cdot x_1 - 3 \cdot x_1^2) \cdot x_1 \cdot dx_1 + \\ &+ \int_0^3 (3 - 8 \cdot x_2) \cdot 2 \cdot dx_2 + \int_0^{2,5} (-8 \cdot x_3 - 21) \cdot (2 + x_3) \cdot dx_3 = \frac{4 \cdot x_1^3}{3} \Big|_0^2 - \frac{3 \cdot x_1^4}{4} \Big|_0^2 + 6 \cdot x_2 \Big|_0^3 - \\ &- \frac{16 \cdot x_2^2}{2} \Big|_0^3 - \frac{16 \cdot x_3^2}{2} \Big|_0^{2,5} - \frac{8 \cdot x_3^3}{3} \Big|_0^{2,5} - 42 \cdot x_3 \Big|_0^{2,5} - \frac{21 \cdot x_3^2}{2} \Big|_0^{2,5} = 10,67 - 12 + 18 - \\ &- 72 - 50 - 41,67 - 105 - 65,63 = -317,63 \text{ кНМ}^3. \end{aligned}$$

Проверка методом Верещагина:

$$\Delta_{1\Sigma P_i}^{zp} \cdot EJ = \sum \omega_i \cdot Mc_i^0,$$

где ω_i – площадь эпюры изгибающих моментов от заданных нагрузок;

Mc_i^0 – ордината эпюры изгибающих моментов от единичной силы, расположенная под центром тяжести эпюры изгибающих моментов от заданных нагрузок.



Разбиваем эпюру $M(x_1)$ на две:

$$M(x_1) = 4 \cdot x_1 - 3 \cdot x_1^2$$

$$M(x_1) = 4 \cdot x_1 \begin{cases} 2M = 8 \text{ кНМ} \\ 0M = 0 \text{ кНМ} \end{cases}$$

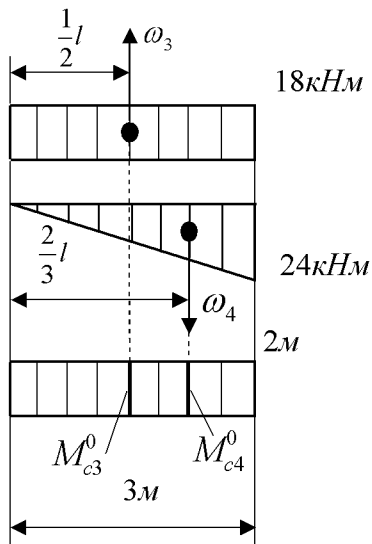
$$M(x_1) = -3 \cdot x_1^2 \begin{cases} 2M = -12 \text{ кНМ} \\ 0M = 0 \text{ кНМ} \end{cases}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8 \text{ кНМ}^2$$

$$Mc_1^0 = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 2 = 1,33 \text{ м}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{3} \cdot l \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (-12) = -8 \text{ кНМ}^2$$

$$Mc_2^0 = \frac{3}{4} \cdot h = \frac{3}{4} \cdot 2 = 1,5 \text{ м}$$



Разбиваем эпюру $M(x_2)$ на две:

$$M(x_2) = 3 - 8 \cdot x_2$$

$$M(x_2) = 3 \text{кНм}$$

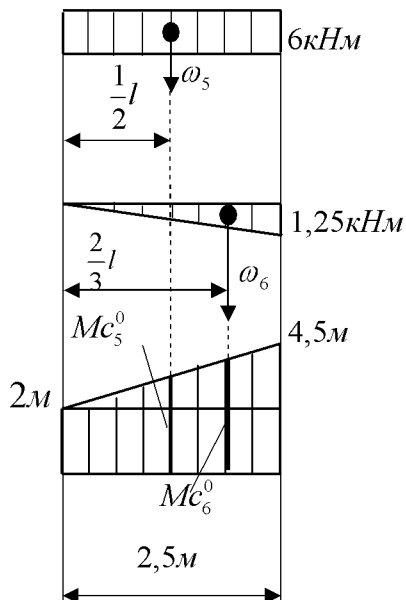
$$M(x_2) = -8 \cdot x_2 \begin{cases} 3\text{м} = -24\text{кНм} \\ 0\text{м} = 0\text{кНм} \end{cases}$$

$$\omega_3 = l \cdot h = 3 \cdot 3 = 9\text{кНм}^2$$

$$Mc_3^0 = 2\text{м}$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-24) = -36\text{кНм}^2$$

$$Mc_4^0 = 2\text{м}$$



Разбиваем эпюру $M(x_3)$ на две:

$$M(x_3) = -8 \cdot x_3 - 21$$

$$M(x_3) = -8 \cdot x_3 \begin{cases} 2,5\text{м} = -20\text{кНм} \\ 0\text{м} = 0\text{кНм} \end{cases}$$

$$M(x_3) = -21\text{кНм}$$

$$\omega_5 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot (-20) = -25\text{кНм}^2$$

$$Mc_5^0 = \frac{2}{3} \cdot 2,5 + 2 = 3,67\text{м}$$

$$\omega_6 = l \cdot h = 2,5 \cdot (-22) = -52,5\text{кНм}^2$$

$$Mc_6^0 = \frac{1}{2} \cdot 2,5 + 2 = 3,25\text{м}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1\Sigma P_i}^{ep} \cdot EJ &= \sum \omega_i \cdot Mc_i^0 = \omega_1 \cdot Mc_1^0 + \omega_2 \cdot Mc_2^0 + \omega_3 \cdot Mc_3^0 + \omega_4 \cdot Mc_4^0 + \omega_5 \cdot Mc_5^0 + \\ &+ \omega_6 \cdot Mc_6^0 = 8 \cdot 1,33 - 8 \cdot 1,5 + 9 \cdot 2 - 36 \cdot 2 - 25 \cdot 3,67 - 52,5 \cdot 3,25 = \\ &= 10,64 - 12 + 18 - 72 - 91,75 - 170,63 = -317,74\text{кНм}^3. \end{aligned}$$

$$\Delta_{1\Sigma P_i}^{ep} = \frac{-317,74\text{кНм}^3}{EJ}.$$

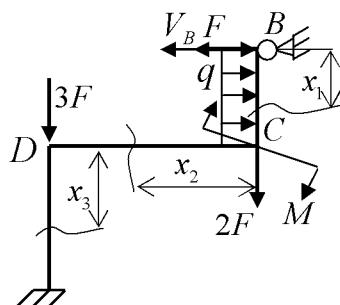
3) Определяем значение неизвестной реакции $X_1 = V_B$:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{1\Sigma P_i}^{ep} = 0,$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1\Sigma P_i}^{ep}}{\delta_{11}} = \frac{317,63}{42,38} = 7,5\text{кН},$$

$$V_B = X_1 = 7,5\text{кН}.$$

8. Вычисляем значения внутренних усилий на каждом силовом участке и строим окончательные эпюры.



Дано:

$$q = 6 \text{ кН / м};$$

$$F = 4 \text{ кН};$$

$$M = 7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$V_B = 7,5 \text{ кН};$$

$$l_1 = 2 \text{ м};$$

$$l_2 = 3 \text{ м};$$

$$l_3 = 2,5 \text{ м}.$$

Рис. 27 Расчетная (эквивалентная) система

$$0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м}$$

$$N(x_1) = 0$$

$$Q(x_1) = -V_B - F + q \cdot x_1 = -7,5 - 4 + 6 \cdot x_1 = -11,5 + 6 \cdot x_1 \left| \begin{array}{l} 2 \text{ м} = 0,5 \text{ кН} \\ 0 \text{ м} = -11,5 \text{ кН} \end{array} \right.$$

$$Q(x_1^*) = -11,5 + 6 \cdot x_1^* = 0$$

$$x_1^* = \frac{11,5}{6} = 1,92 \text{ м}$$

$$M(x_1) = V_B \cdot x_1 + F \cdot x_1 - q \cdot \frac{x_1^2}{2} = (7,5 + 4) \cdot x_1 - 6 \cdot \frac{x_1^2}{2} = 11,5 \cdot x_1 - 3x_1^2 \left| \begin{array}{l} 2 \text{ м} = 11 \text{ кНм} \\ 1,92 \text{ м} = 11,02 \text{ кНм} \\ 0 \text{ м} = 0 \text{ кНм} \end{array} \right.$$

$$0 \leq x_2 \leq 3 \text{ м}$$

$$N(x_2) = -V_B - F + q \cdot l_1 = -7,5 - 4 + 6 \cdot 2 = 0,5 \text{ кН}$$

$$Q(x_2) = 2F = 8 \text{ кН}$$

$$M(x_2) = V_B \cdot l_1 + F \cdot l_1 - q \cdot \frac{l_1^2}{2} + M - 2F \cdot x_2 = 15 + 8 - 12 + 7 - 8 \cdot x_2 = 18 - 8 \cdot x_2 \left| \begin{array}{l} 3 \text{ м} = -6 \text{ кНм} \\ 0 \text{ м} = 18 \text{ кНм} \end{array} \right.$$

$$0 \leq x_3 \leq 2,5 \text{ м}$$

$$N(x_3) = -3F - 2F = -5F = -5 \cdot 4 = -20 \text{ кН}$$

$$Q(x_3) = -V_B - F + q \cdot l_1 = -7,5 - 4 = -11,5 \text{ кН}$$

$$M(x_3) = V_B \cdot (l_1 + x_3) + F \cdot (l_1 + x_3) - q \cdot l_1 \left(\frac{l_1}{2} + x_3 \right) + M - 2F \cdot l_2 = 15 + 7,5 \cdot x_3 +$$

$$+ 8 + 4 \cdot x_3 - 12 - 12 \cdot x_3 + 7 - 24 = -6 - 0,5 \cdot x_3 \left| \begin{array}{l} 2,5 \text{ м} = -7,25 \text{ кНм} \\ 0 \text{ м} = -6 \text{ кНм} \end{array} \right.$$

Строим окончательные (суммарные) эпюры внутренних усилий (рис. 28).

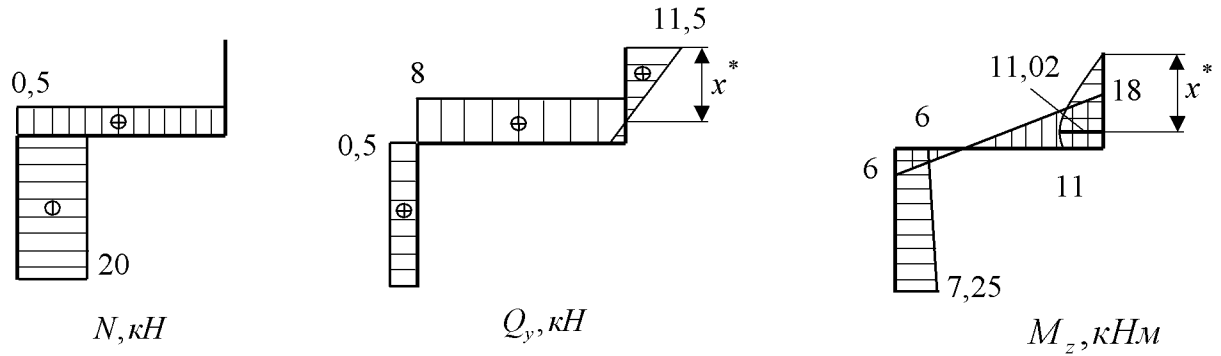


Рис. 28 Окончательные (суммарные) эпюры внутренних усилий

9. Проводим статическую проверку в узлах С и D (рис. 29, 30):

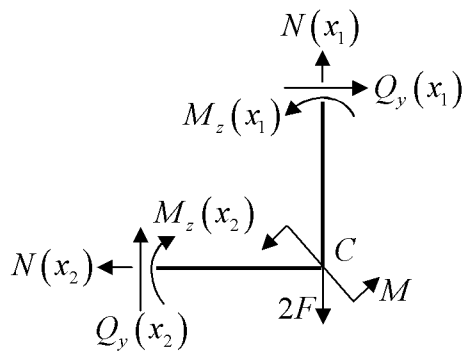


Рис. 29 Узел С

$$\begin{aligned} \sum F(x) &= 0; \\ N(x_1) - 2F + Q(x_2) &= 0 \\ 0 - 8 + 8 &= 0. \\ \sum F(y) &= 0; \\ -Q(x_1) + N(x_2) &= 0 \\ -0,5 + 0,5 &= 0. \\ \sum M(C) &= 0; \\ M(x_1) + M - M(x_2) &= 0 \\ 11 + 7 - 18 &= 0. \end{aligned}$$

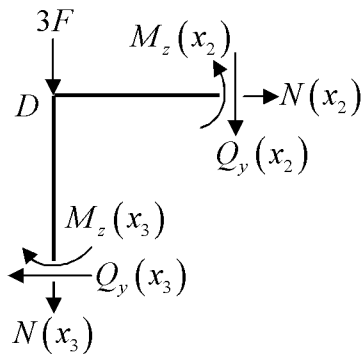


Рис. 30 Узел D

$$\begin{aligned} \sum F(x) &= 0; \\ N(x_2) - Q(x_3) &= 0 \\ 0,5 - 0,5 &= 0. \\ \sum F(y) &= 0; \\ -Q(x_2) - 3F - N(x_3) &= 0 \\ -8 - 12 - (-20) &= 0. \\ \sum M(D) &= 0; \\ M(x_2) - M(x_3) &= 0 \\ -6 - (-6) &= 0. \end{aligned}$$

10. Выполняем проверку равенства нулю перемещения по направлению отброшенной связи ($\Delta_{12P_i} = 0$), подтверждающую правильность определения реакции $X_1 = V_B$, используя методы Мора и Верещагина. Она заключается в определении перемещения Δ_{12P_i} в эквивалентной системе по направлению отбро-

шенной связи с учетом найденной опорной реакции $X_1 = V_B$, то есть следует убедиться, что $\Delta_{1\Sigma P_i} = 0$.

Для этого используем метод Мора. Под интегралами перемножаем уравнения изгибающих моментов от суммарных внешних и единичной нагрузок на соответствующих силовых участках:

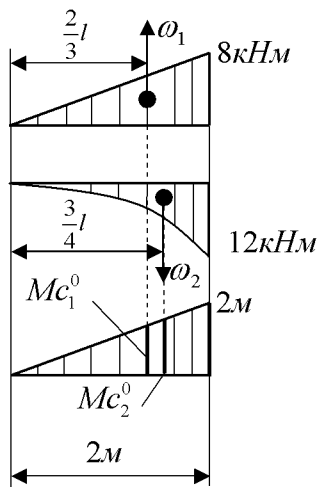
$$\Delta_{1\Sigma P_i} \cdot EJ = \sum \int_L M(x_i) \cdot M^0(x_i) \cdot dx_i,$$

где $M(x_i)$ – значение изгибающего момента на i -том силовом участке от действия заданных внешних нагрузок и найденной реакции $X_1 = V_B$;

$M^0(x_i)$ – значение изгибающего момента на i -том силовом участке от действия единичной силы.

$$\begin{aligned} \Delta_{1\Sigma P_i} \cdot EJ &= \sum \int_L M(x_i) \cdot M^0(x_i) \cdot dx_i = \int_0^2 M(x_1) \cdot M^0(x_1) \cdot dx_1 + \int_0^3 M(x_2) \cdot M^0(x_2) \cdot dx_2 + \\ &+ \int_0^{2,5} M(x_3) \cdot M^0(x_3) \cdot dx_3 = \int_0^2 (11,5 \cdot x_1 - 3 \cdot x_1^2) \cdot x_1 \cdot dx_1 + \int_0^3 (18 - 8 \cdot x_2) \cdot 2 \cdot dx_2 + \\ &+ \int_0^{2,5} (-6 - 0,5 \cdot x_3) \cdot (2 + x_3) \cdot dx_3 = \frac{11,5 \cdot x_1^3}{3} \Big|_0^2 - \frac{3 \cdot x_1^4}{4} \Big|_0^2 + 36 \cdot x_2 \Big|_0^3 - \frac{16 \cdot x_2^2}{2} \Big|_0^3 - 12 \cdot x_3 \Big|_0^{2,5} - \\ &- \frac{6 \cdot x_3^2}{2} \Big|_0^{2,5} - \frac{x_3^2}{2} \Big|_0^{2,5} - \frac{0,5 \cdot x_3^3}{3} \Big|_0^{2,5} = 30,67 - 12 + 108 - 72 - 30 - 18,75 - 3,125 - 2,6 = 0,2 \approx 0. \end{aligned}$$

Проверка методом Верещагина:



Разбиваем эпюру $M(x_1)$ на две:

$$M(x_1) = 22,5 \cdot x_1 - 3 \cdot x_1^2$$

$$M(x_1) = 11,5 \cdot x_1 \Big|_{0M=0\text{кНм}}^{2M=23\text{кНм}}$$

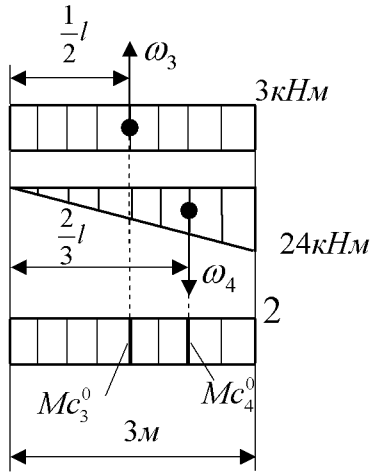
$$M(x_1) = -3 \cdot x_1^2 \Big|_{0M=0\text{кНм}}^{2M=-12\text{кНм}}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 23 = 23 \text{кНм}^2$$

$$Mc_1^0 = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 2 = 1,33 \text{м}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{3} \cdot l \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (-12) = -8 \text{кНм}^2$$

$$Mc_2^0 = \frac{3}{4} \cdot h = \frac{3}{4} \cdot 2 = 1,5 \text{м}$$



Разбиваем эюру $M(x_2)$ на две:

$$M(x_2) = 18 - 8 \cdot x_1$$

$$M(x_2) = 18 \text{ кНм}$$

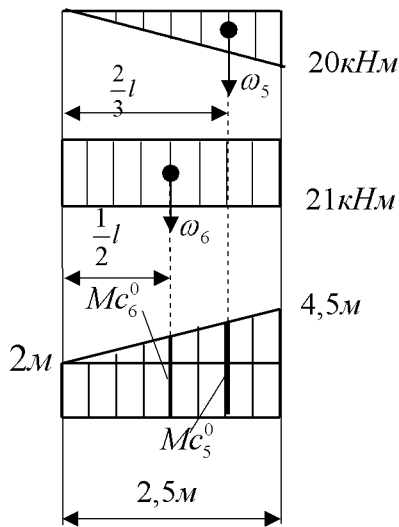
$$M(x_2) = -8 \cdot x_2 \begin{cases} 3 \text{ м} = -24 \text{ кНм} \\ 0 \text{ м} = 0 \text{ кНм} \end{cases}$$

$$\omega_3 = l \cdot h = 3 \cdot 18 = 54 \text{ кНм}^2$$

$$Mc_3^0 = 2 \text{ м}$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-24) = -36 \text{ кНм}^2$$

$$Mc_4^0 = 2 \text{ м}$$



Разбиваем эюру $M(x_3)$ на две:

$$M(x_3) = -6 - 0,5 \cdot x_3$$

$$M(x_3) = -6 \text{ кНм}$$

$$M(x_3) = -0,5 \cdot x_3 \begin{cases} 2,5 \text{ м} = -1,25 \text{ кНм} \\ 0 \text{ м} = 0 \text{ кНм} \end{cases}$$

$$\omega_5 = l \cdot h = 2,5 \cdot (-6) = -15 \text{ кНм}^2$$

$$Mc_5^0 = \frac{1}{2} \cdot 2,5 + 2 = 3,25 \text{ м}$$

$$\omega_6 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot (-1,25) = -1,56 \text{ кНм}^2$$

$$Mc_4^0 = \frac{2}{3} \cdot 2,5 + 2 = 3,67 \text{ м}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{12P_i} \cdot EJ &= \sum \omega_i \cdot Mc_i^0 = \omega_1 \cdot Mc_1^0 + \omega_2 \cdot Mc_2^0 + \omega_3 \cdot Mc_3^0 + \omega_4 \cdot Mc_4^0 + \omega_5 \cdot Mc_5^0 + \\ &+ \omega_6 \cdot Mc_6^0 = 23 \cdot 1,33 - 8 \cdot 1,5 + 54 \cdot 2 - 36 \cdot 2 - 15 \cdot 3,25 - 1,56 \cdot 3,67 = \\ &= 30,59 - 12 + 108 - 72 - 48,75 - 5,73 = 0,11 \approx 0 \end{aligned}$$

Таким образом, установлено, что реакция $X_1 = V_A$ определена верно.

11. Подбираем поперечные сечения конструкции, состоящей из двутавровой балки и проверяем конструкцию на прочность по касательным напряжениям.

Подбор сечения осуществляется по условиям прочности при изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \leq [\sigma];$$

$$W_x^{\text{необх.}} = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{18 \text{ кНм}}{160 \text{ МПа}} = \frac{18 \cdot 10^4 \text{ кгс} \cdot \text{см}}{1600 \text{ кгс} / \text{см}^2} = 112,5 \text{ см}^3.$$

Из таблицы сортамента (ГОСТ 8239 –89) выбираем двутавр № 18:

$$W_x = 143 \text{ см}^3; S_x = 81,4 \text{ см}^3; J_x = 1290 \text{ см}^4; A = 23,4 \text{ см}^2; s = 0,5 \text{ см}.$$

Расчет на прочность проводим по условию прочности при растяжении и изгибе:

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} \right| = \left| \frac{0,5 \cdot 10^2}{23,4} + \frac{18 \cdot 10^4}{143} \right| = 1260,9 \text{ кгс} / \text{см}^2.$$

Определяем перегрузку (недогрузку):

$$\Delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{1260,9 - 1600}{1600} \cdot 100\% = -21,2\% \text{ } \%$$

Перегрузка не должна превышать 5 %.

Проверка конструкции на прочность по касательным напряжениям осуществляется по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{|Q_{\max}| \cdot S_x}{s \cdot J_x} \leq [\tau].$$

Для искомой конструкции $Q_{\max} = 11,5 \text{ кН}$:

$$\tau_{\max} = \frac{11,5 \cdot 10^2 \cdot 51,4}{0,51 \cdot 1290} = 142,29 \text{ кгс} / \text{см}^2;$$

$$\tau_{\max} = 142,29 \text{ кгс} / \text{см}^2 \leq [\tau] = 1000 \text{ кгс} / \text{см}^2.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чем сущность метода сквозного разреза (сечения)?
2. Какой вид нагружения называется растяжением (сжатием)?
3. Какое правило знаков принято для продольной силы? Как вычисляется значение продольной силы в поперечном сечении бруса?
4. Что называется эпюрой? Правило построения эпюры продольных сил.
5. Как вычисляются нормальные напряжения в поперечном сечении растянутого стержня?
6. Что называется абсолютным и относительным удлинением?
7. Что характеризует модуль упругости? Как он влияет на деформации бруса?
8. Что называется коэффициентом Пуассона и каковы его значения?
9. Сформулируйте закон Гука.
10. Какой вид нагружения называется кручением?
11. Как определяются напряжения при кручении?
12. Что такое момент сопротивления сечения при кручении?
13. В чем состоят условия прочности при кручении?
14. Какая величина называется жесткостью при кручении?
15. Как в общем случае определяются углы закручивания?
16. Что называется чистым изгибом, поперечным изгибом?
17. Какие уравнения используются для определения опорных реакций?
18. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях бруса при изгибе?
19. Какие правила знаков приняты для каждого из внутренних усилий?
20. Чему равен изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y в любом сечении балки?
21. Какая дифференциальная зависимость существует между поперечной силой и интенсивностью распределённой нагрузки?

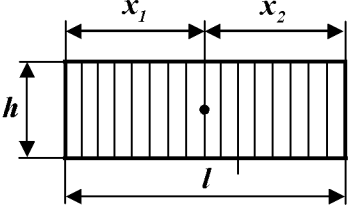
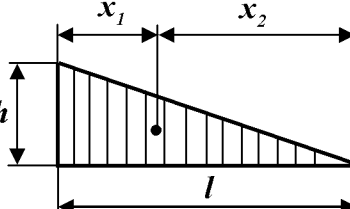
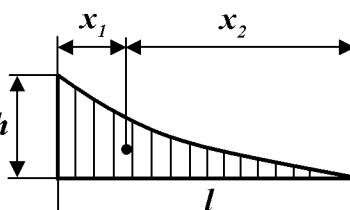
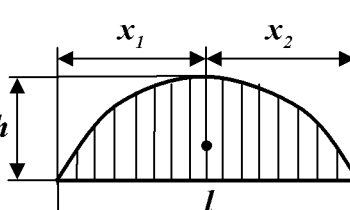
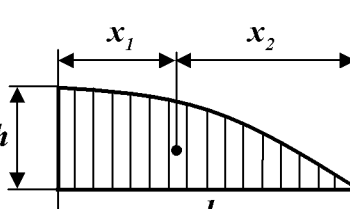
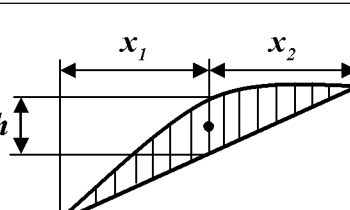
22. Как определяется экстремальное значение изгибающего момента?
23. По какой формуле определяются нормальные напряжения в поперечных сечениях при изгибе?
24. Как определяются осевые моменты сопротивления прямоугольного и круглого поперечного сечения?
25. Проанализируйте формулу Журавского.
26. Что называется статически неопределимой системой?
27. Какая система называется геометрически неизменяемой?
28. В чем заключается выбор основной системы?
29. Каков физический смысл уравнений деформаций (канонических уравнений метода сил)?
30. Что означают величины X_i , δ_{ii} , и Δ_{iSP_i} ?
31. Объясните сущность метода Мора.
32. Объясните сущность метода Верещагина.
33. Как проводится статическая проверка окончательных эпюр N , Q , M ?
34. На чем основана и как проводится деформационная проверка окончательной эпюры изгибающих моментов?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

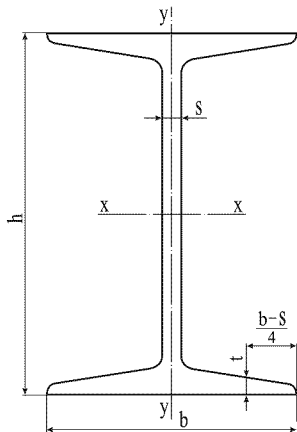
1. Пирогов, Е.Н. Сопротивление материалов [Текст] : конспект лекций. С примерами типичных расчетов / Е.Н. Пирогов.– М.: Айрис Пресс, 2003. – 176 с.
2. Сопротивление материалов [Текст] : учеб. пособие / под ред. Н.А. Костенко – 2-е изд. испр. – М.: Высш. шк., 2004. – 430 с.
3. Тимошенко, С.П. Механика материалов [Текст]: учеб./ С.П. Тимошенко.– СПб.: Лань, 2002. – 672 с.
4. Харчевников, В.И. Сопротивление материалов и прикладная механика [Текст]: тексты лекций / В.И. Харчевников, Т.Н. Стородубцева. – Воронеж: ВГЛТА, 2004. – 107 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Площади и координаты центра тяжести простых фигур

| Виды эпюр изгибающих моментов | Площадь эпюры ω | Абсциссы центра тяжести эпюры | |
|---|------------------------------|----------------------------------|----------------|
| | | x_1 | x_2 |
|  | $l \cdot h$ | $\frac{1}{2}l$ | $\frac{1}{2}l$ |
|  | $\frac{1}{2}l \cdot h$ | $\frac{1}{3}l$ | $\frac{2}{3}l$ |
|  | $\frac{1}{3}l \cdot h$ | $\frac{1}{4}l$ | $\frac{3}{4}l$ |
|  | $\frac{2}{3}l \cdot h$ | $\frac{1}{2}l$ | $\frac{1}{2}l$ |
|  | $\frac{2}{3}l \cdot h$ | $\frac{3}{8}l$ | $\frac{5}{8}l$ |
|  | $\frac{2}{3}l \cdot h$ | $\frac{1}{2}l$ | $\frac{1}{2}l$ |

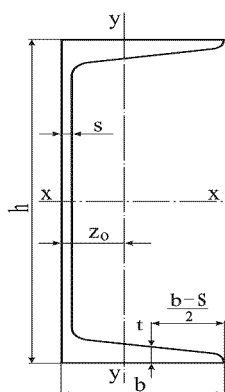
Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239-89)



- h – высота двутавра;
- b – ширина полки;
- s – толщина стенки;
- t – средняя толщина полки;
- A – площадь поперечного сечения;
- J – момент инерции;
- W – момент сопротивления;
- S – статический момент полусечения;
- i – радиус инерции.

| № | Размеры, мм | | | | A , $см^2$ | J_x , $см^4$ | W_x , $см^3$ | i_x , $см$ | S_x , $см^3$ | J_y , $см^4$ | W_y , $см^3$ | i_y , $см$ |
|----|-------------|-----|-----|------|-----------------|-------------------|-------------------|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------|
| | h | b | s | t | | | | | | | | |
| 10 | 100 | 55 | 4,5 | 7,2 | 12 | 198 | 39,7 | 4,06 | 23 | 17,9 | 6,49 | 1,22 |
| 12 | 120 | 64 | 4,8 | 7,3 | 14,7 | 350 | 58,4 | 4,88 | 33,7 | 27,9 | 8,72 | 1,38 |
| 14 | 140 | 73 | 4,9 | 7,5 | 17,4 | 572 | 81,7 | 5,73 | 46,8 | 41,9 | 11,5 | 1,55 |
| 16 | 160 | 81 | 5 | 7,8 | 20,2 | 873 | 109 | 6,57 | 62,3 | 58,6 | 14,5 | 1,7 |
| 18 | 180 | 90 | 5,1 | 8,1 | 23,4 | 1290 | 143 | 7,42 | 81,4 | 82,6 | 18,4 | 1,88 |
| 20 | 200 | 100 | 5,2 | 8,4 | 26,8 | 1840 | 184 | 8,28 | 104 | 115 | 23,1 | 2,07 |
| 22 | 220 | 110 | 5,4 | 8,7 | 30,6 | 2550 | 232 | 9,13 | 131 | 157 | 28,6 | 2,27 |
| 24 | 240 | 115 | 5,6 | 9,5 | 34,8 | 3460 | 289 | 9,97 | 163 | 198 | 34,5 | 2,37 |
| 27 | 270 | 125 | 6 | 9,8 | 40,2 | 5010 | 371 | 11,2 | 210 | 260 | 41,5 | 2,54 |
| 30 | 300 | 135 | 6,5 | 10,2 | 46,5 | 7080 | 472 | 12,3 | 268 | 337 | 49,9 | 2,69 |
| 33 | 330 | 140 | 7 | 11,2 | 53,8 | 9840 | 597 | 13,5 | 339 | 419 | 59,9 | 2,79 |
| 36 | 360 | 145 | 7,5 | 12,3 | 61,9 | 13380 | 743 | 14,7 | 423 | 516 | 71,1 | 2,89 |
| 40 | 400 | 155 | 8,3 | 13 | 72,6 | 19,62 | 953 | 16,2 | 545 | 667 | 86,1 | 3,03 |
| 45 | 450 | 160 | 9 | 14,2 | 84,7 | 27696 | 1231 | 18,1 | 708 | 8087 | 101 | 3,09 |
| 50 | 500 | 170 | 10 | 15,2 | 100 | 39727 | 1589 | 19,9 | 919 | 1043 | 123 | 3,23 |
| 55 | 550 | 180 | 11 | 16,5 | 118 | 55962 | 2035 | 21,8 | 1181 | 1356 | 151 | 3,39 |
| 60 | 600 | 190 | 12 | 17,8 | 138 | 76806 | 2560 | 23,6 | 1491 | 1725 | 182 | 3,54 |

Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240-89)



h – высота швеллера;

b – ширина полки;

s – толщина стенки;

t – средняя толщина полки;

A – площадь поперечного сечения;

J – момент инерции;

W – момент сопротивления;

S – статический момент полусечения;

i – радиус инерции;

z_0 – расстояние от оси y до наружной грани стенки.

| № | Размеры, мм | | | | A , $см^2$ | J_x , $см^4$ | W_x , $см^3$ | i_x , $см$ | S_x , $см^3$ | J_y , $см^4$ | W_y , $см^3$ | i_y , $см$ | z_0 , $см$ |
|-----|-------------|-----|-----|------|-----------------|-------------------|-------------------|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------|-----------------|
| | h | b | s | t | | | | | | | | | |
| 5 | 50 | 32 | 4,4 | 7 | 6,16 | 22,8 | 9,1 | 1,92 | 5,59 | 5,61 | 2,75 | 0,95 | 1,16 |
| 6,5 | 65 | 36 | 4,4 | 7,2 | 7,51 | 48,6 | 15 | 2,54 | 9 | 8,7 | 3,68 | 1,08 | 1,24 |
| 8 | 80 | 40 | 4,5 | 7,4 | 8,98 | 89,4 | 22,4 | 3,16 | 13,3 | 12,8 | 4,75 | 1,19 | 1,31 |
| 10 | 100 | 46 | 4,5 | 7,6 | 10,9 | 174 | 34,8 | 3,99 | 20,4 | 20,4 | 6,46 | 1,37 | 1,44 |
| 12 | 120 | 52 | 4,8 | 7,8 | 13,3 | 304 | 50,6 | 4,78 | 29,6 | 31,2 | 8,52 | 1,53 | 1,54 |
| 14 | 140 | 58 | 4,9 | 8,1 | 15,6 | 491 | 70,2 | 5,6 | 40,8 | 45,4 | 11 | 1,7 | 1,67 |
| 16 | 160 | 64 | 5 | 8,4 | 18,1 | 747 | 93,4 | 6,42 | 54,1 | 63,3 | 13,8 | 1,87 | 1,8 |
| 16a | 160 | 68 | 5 | 9 | 19,5 | 823 | 103 | 6,49 | 59,4 | 78,8 | 16,4 | 2,01 | 2 |
| 18 | 180 | 70 | 5,1 | 8,7 | 20,7 | 1090 | 121 | 7,24 | 69,8 | 86 | 17 | 2,04 | 1,94 |
| 18a | 180 | 74 | 5,1 | 9,3 | 22,2 | 1190 | 132 | 7,32 | 76,1 | 105 | 20 | 2,18 | 2,13 |
| 20 | 200 | 76 | 5,2 | 9 | 23,4 | 1520 | 152 | 8,07 | 87,8 | 113 | 20,5 | 2,2 | 2,07 |
| 22 | 220 | 82 | 5,4 | 9,5 | 26,7 | 2110 | 192 | 8,89 | 110 | 151 | 25,1 | 2,37 | 2,21 |
| 24 | 240 | 90 | 5,6 | 10 | 30,6 | 2900 | 242 | 9,73 | 139 | 208 | 31,6 | 2,6 | 2,42 |
| 27 | 270 | 95 | 6 | 10,5 | 35,2 | 4160 | 308 | 10,9 | 178 | 262 | 37,3 | 2,73 | 2,47 |
| 30 | 300 | 100 | 6,5 | 11 | 40,5 | 5810 | 387 | 12 | 224 | 327 | 43,6 | 2,84 | 2,52 |
| 33 | 330 | 105 | 7 | 11,7 | 46,5 | 7980 | 484 | 13,1 | 281 | 410 | 51,8 | 2,97 | 2,59 |
| 36 | 360 | 110 | 7,5 | 12,6 | 53,4 | 10820 | 601 | 14,2 | 350 | 513 | 61,7 | 3,1 | 2,68 |
| 40 | 400 | 115 | 8 | 13,5 | 61,5 | 15220 | 761 | 15,7 | 444 | 642 | 73,4 | 3,23 | 2,75 |

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| Введение..... | 3 |
| Используемые обозначения и единицы измерения..... | 4 |
| Общие указания по выбору варианта и выполнению расчетно-графических работ..... | 5 |
| Основные понятия и зависимости..... | 6 |
| 1 Задачи курса “Соппротивление материалов”..... | 6 |
| 2 Внутренние усилия. Метод сквозного разреза. Типы деформации..... | 7 |
| 3 Растяжение-сжатие..... | 9 |
| 4 Кручение..... | 11 |
| 5 Поперечный изгиб..... | 14 |
| 6 Расчет на жесткость при изгибе..... | 20 |
| 7 Статически неопределимая система..... | 25 |
| Темы и варианты заданий..... | 29 |
| Расчетно-графическая работа № 1..... | 29 |
| Задание 1 Осевое растяжение (сжатие) стержня..... | 29 |
| Задание 2 Кручение стержня круглого поперечного сечения..... | 31 |
| Задание 3 Расчет на прочность при изгибе..... | 33 |
| Расчетно-графическая работа № 2..... | 35 |
| Примеры решения типовых задач..... | 38 |
| Расчетно-графическая работа № 1..... | 38 |
| Задание 1 Осевое растяжение (сжатие) стержня..... | 38 |
| Задание 2 Кручение стержня круглого поперечного сечения..... | 42 |
| Задание 3 Расчет на прочность при изгибе..... | 46 |
| Расчетно-графическая работа № 2..... | 50 |
| Вопросы для самопроверки..... | 62 |
| Библиографический список..... | 63 |
| Приложения..... | 64 |

Зобов Сергей Юрьевич
Черников Эдуард Анатольевич
Зеленская Ольга Викторовна

Сопротивление материалов
Расчет элементов конструкций

Учебное пособие к расчетно-графическим работам
по сопротивлению материалов для технических направлений
и специальностей подготовки ВГЛТА.

Редактор С.Ю. Крохотина

Подписано в печать Формат 60x84/16. Заказ №
Объем п.л. Усл. п.л. . Уч. - изд. . Тираж 500 экз.

Воронежская государственная лесотехническая академия
РИО ВГЛТА. 394613, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8
Отпечатано в типографии ООО «Сатурн»
394087, г. Воронеж, ул. Ломоносова, 87